MODUL MATEMATIKA BISNIS

Digunakan di lingkungan Program Studi
Manajemen Keuangan dan Perbankan Syariah

Disusun oleh :

R BAMBANG BUDHIJANA

INDONESIA
BANKING
SCHOOL

MODUL
KONSEP-KONSEP DASAR
MATEMATIKA BISNIS

Dr R. BAMBANG BUDHIJANA, MSc

Indonesia Banking School

Jakarta Selatan

September 2021

DAFTAR ISI

BAB I
SISTEM BILANGAN

1.1 BILANGAN RIIL

Ada banyak cara memperkenalkan suatu bilangan. Dalam ilmu matematika, bilangan yang kita kenal dapat digolongankan (dua) yaitu bilangan riil dan bilangan imajiner Perbedam keduanya adalah bahwa setiap bilangan risl mengandung hanya salah satu sifat secara tegas yaitu positif atau negatif akan tetapi tidak keduanya. Bilangan riil R merupakan gabungan bilangan rasional dan bilangan irrasional atau bilangan yang unsur-unsurnya terdiri dari bilangan rasional dan bilangan irrasional. Penulisan himpunan bilangan riil adalah:

R = (x:x= rasional atau xirrasional) 2-1

Sifat-sifat bilangan riil dapat digunakan sebagai dasar untuk membangun sistem bilangan rasional positif. Selanjutnya dari bilangan rasional positif tersebut dapat diturunkan kembali untuk menyusun sistem bilangan irrasional positif (misalnya $\sqrt{124}$, 22/7, $\in$ = 2,71828182846..., merupakan tiga contoh bilangan irrasional). Langkah berikutnya adalah memperkenalkan bilangan irrasional negatif dan nol. Bagian yang cukup rumit dari proses tersebut adalah peralihan dari bilangan rasional ke bilangan irrasional.

Bilangan imajiner mengandung kedua sifat positif dan negatif sekaligus dan tidak secara tegas pada salah satu diantara keduanya misalnya $\sqrt{100} = 10$; x = 12; y = $\sqrt{-625}$= 25. Atau, bilangan imajiner merupakan bilangan-bilangan yang ditandai dengan huruf "Y" dari negatif tak terhingga sampai positif tak terhingga.

Bilangan kompleks K adalah gabungan dari bilangan riil dan bilangan imajiner. Penulisan himpunan bilangan kompleks adalah :

$K = \{a + bi \mid a \in R \text{ dan } b = R \text{ dan } i^2 = -1\}$ 2-2

a adalah suku pertama dari (a + bi) disebut bagian yang riil dan *bi* adalah suku kedua dari (a + b) disebut bagian imajiner dan *i* disebut kesatuan imajiner.

1.2 SISTEM BILANGAN RASIONAL DAN BILANGAN IRRASIONAL

Bilangan rasional adalah bilangan hasil bagi antara dua bilangan yang berupa bilangan bulat atau pecahan (a/b) di mana a dan b bilangan bulat dan b ≠ 0. Himpunan semua bilangan rasional dapat dituliskan sebagai:

$Q = \{a/b \mid a \in Z \text{ dan } b \in Z, b \neq 0\}$ 2-3

Bilangan irrasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai pembagian dua bilangan bulat atau tidak dapat dinyatakan sebagai (a/b) di mana a dan b bilangan bulat dan b ≠ 0. Dengan demikian bilangan irrasional merupakan bilangan hasil bagi antara dua bilangan yang berupa bilangan bulat atau pecahan dengan desimal tak terbatas dan tak berulang.

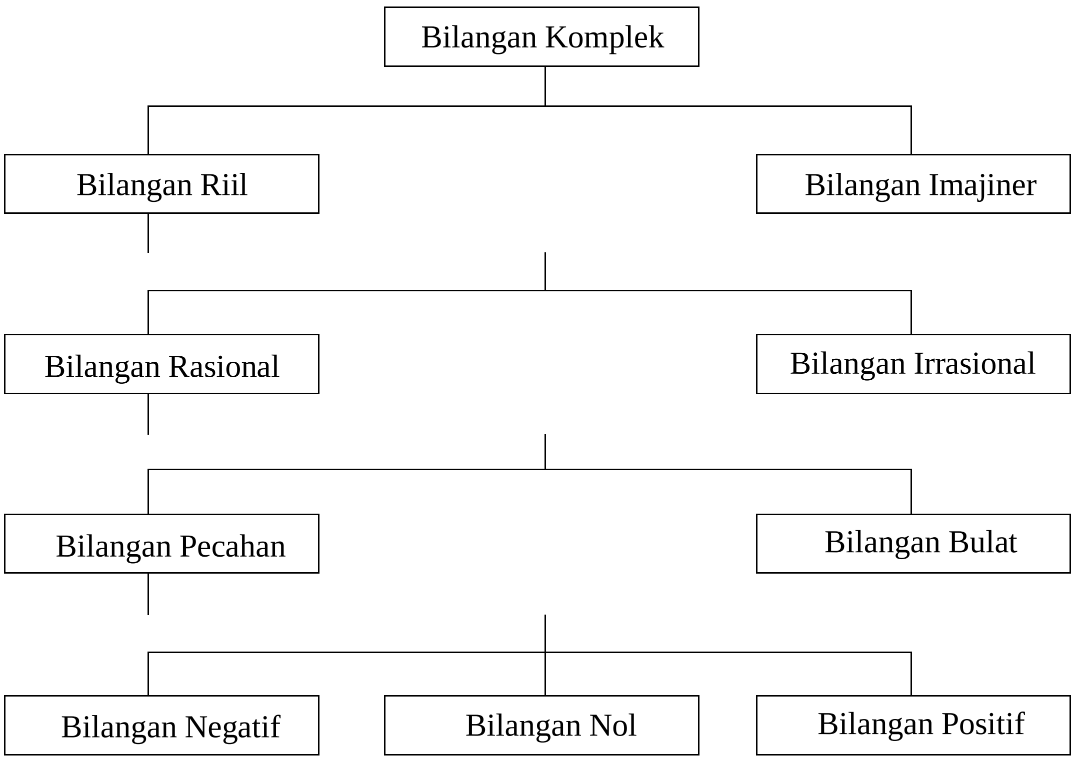
Dengan menggunakan pendekatan teori himpunan, diagram di bawah ini (Gambar 2.1) kiranya dapat memperjelas sistem bilangan.

1.2.1 Bilangan Bulat Z

Bilangan Bulat Z adalah bilangan yang terdiri dari bilangan bulat negatif, nol dan bilangan bulat positif.

Contoh: Himpunan semua bilangan bulat

Z= (-3,-2,-1,0, 1, 2, 3...)



Gambar 2.1 Sistem Bilangan

1.2.2 Bilangan Asli N

Bilangan Asli N adalah bilangan bulat positif.

Contoh: Himpunan semua bilangan asli N= {1, 2, 3, 4 .... }.

1.2.3 Bilangan Cacah C

Bilangan Cacah C adalah bilangan asli dan nol.

Contoh: Himpunan semua bilangan cacah C = {0, 1, 2, 3, 4}

1.2.4 Bilangan Prima P

Bilangan Prima P adalah bilangan asli yang hanya dapat dibagi dengan satu dan bilangan itu sendiri.

Contoh: Himpunan semua bilangan prima P= {2, 3, 5, 7, 11, ... }

1.3 SIFAT-SIFAT OPERASI PADA BILANGAN

1. Sifat-sifat Penjumlahan

- Sifat komutatif	a + b = b + a
- Sifat asosiatif	(a + b) + c = a + (b + c)
- Penjumlahan dengan nol	1 + 0 = 1
	a + 0 = 4

2. Sifat-sifat Pengurangan

a – b ≠ b – a	sifat komutatif tidak berlaku
(a – b) – c ≠ a – (b – c)	sifat asosiaif tidakberlaku
Pengurangan dengan nol	1 – 0 = 1

3. Sifat-sifat Perkalian

- Sifat komutatif	a x b = b x a
- Sifat asosiatif	(a x b) x c = a x (b x c)
- Sifat distributif	(a – b) x c = (a x c) – (b x c)
- Perkalian dengan nol	1 x 0 = 0
	a x 0 = 0
- Perkalian dengan satu	a x 1 = 0
	b x 1 = b
	c x 1 = c

4. Sifat-sifat Pembagian

a : b ≠ b : a	sifat komutatif tidak berlaku
(a : b) : c ≠ a : (b : c)	sifat asosiatif tidak berlaku
Sifat distributif	(a + b) : c = (a : c) + (b + c)
	(a – b) : c = (a : c) – (b : c)
Pembagian dengan nol	1 : 0 = tidak didefinisikan
	0 : a = 0
Pembagian dengan satu	a : 1 = a
	1 : 1 = 1

5. Sifat-sifat Perpangkatan

$(a \text{ x } b)^c = a^c \text{ x } b^c$

$(a^b)^c = a^{bc}$

$a^b \text{ x } a^c = a^{b+c}$

$a^b : a^c = a^{b-c}$

6. Sifat-sifat Penarikan Akar

$\sqrt{a}$ = b artinya $b^2 = a$

$\sqrt[n]{a}$ = b artinya $b^n = a$

$\sqrt[n]{a^m}$ = b artinya $a^n = b^n$

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} = \sqrt{(a \times b \times c)}$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \sqrt{a/b}$

1.4 INDUKSI MATEMATIK

Pada sistem bilangan riil ada bilangan 1. Bilangan 1+1 dinyatakan dengan 2, bilangan 1+2 dinyatakan dengan 3, bilangan 1+3 dinyatakan 4 dan seterusnya. Di sini akan kita definisikan suatu bilangan asli melalui suatu kumpulan induktif.

Jika S(n) suatu pernyataan mengenai bilangan asli n, maka jika $(1) benar dan pemisalan S(k) benar mengakibatkan S(k+1) benar pula. Dengan demikian S(n) benar untuk setiap bilangan asli n.

Contoh 1. Untuk setiap bilangan asli n berlaku:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n + 1) \; (*)$$

Untuk n = 1, ruas kiri (*) adalah 1 dan ruas kanan (*) $\frac{1}{2}1(1+1) = 1$.

Jadi, (*) benar untuk n = 1.

Misalkan (*) benar untuk nk, maka:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots + k = \frac{1}{2}k(k + 1)$$

Untuk n = k + 1 diperoleh:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots.\ k + (k+1) = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + k + 1 = (\frac{1}{2}k^2 + k + 1 = (\frac{1}{2}k^2 + k + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(k + 1)^2 + \frac{1}{2}(k + 1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

Ini berarti (*) benar untuk n = k + 1, jadi menurut prinsip induksi matematik (*) benar untuk setiap bilangan asli n.

Contoh 2. Untuk setiap bilangan asli n berlaku:

$$4 + 8 + 12 + \ldots. + 4n = 2n\,(1 + n)\ (*)$$

Untuk n = 1, ruas kiri (*) adalah 4 dan ruas kanan (*) 2(1)(1+1) = 4

Jadi, (*) benar untuk n 1. Misalkan (*) benar untuk n = k, maka

$$4 + 8 + 12 + \ldots + 4k = 2k(k+ 1)$$

Untuk n = k + 1 diperoleh:

$$\begin{aligned} 4 + 8 + 12 + \ldots + 4k + 4(k+1) &= 2k(k+1) + 4(k+1) \\ &= (2k+4)(k+1) \\ &= 2(k+2)(k+1) \\ &= 2(k+1)(k+2) \end{aligned}$$

Ini berarti (*) benar untuk n = k + 1, jadi menurut prinsip induksi matematik (*) benar untuk setiap bilangan asli n.

Contoh 3. Untuk setiap bilangan asli n berlaku:

$$1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + 3n - 2 = 1\frac{1}{2}n^2 - n(*)$$

Untuk n = 1, ruas kiri adalah 1 dan ruas kanan $1\frac{1}{2}\ (1) - \frac{1}{2}\ (1) = 1$.

Jadi, (*) benar untuk n 1. Misalkan (*) benar untuk n = k.

maka:

$$1 + 4 + 7 + 10 + \ldots. + (3k - 2) = 1\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k$$

Untuk n = k + 1 diperoleh:

$$1 + 4 + 7 + 10 + ... + (3k - 2) + [3 (k + 1) - 2] - 1\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k +$$

$$(3k + 1) = 1\frac{1}{2}k^2 + 3k + 1\frac{1}{2} - (\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}) = 1\frac{1}{2}(k+1)^2 - \frac{1}{2}(k + 1)$$

Ini berarti (*) benar untuk n=k+1, jadi menurut prinsip induksi matematik (*) benar untuk setiap bilangan asli n.

Contoh 4. Untuk setiap bilangan asli n berlaku:

$$2 + 4 + 8 + 10 + ... + 2n = n(1 + n) \quad (*)$$

Untuk n = 1, ruas kiri adalah 2 dan ruas kanan 1(1+1) = 2

Jadi, (*) benar untuk n = 1. Misalkan (*) benar untuk n = k, maka:

$$2 + 4 + 8 + 10 + ... + 2k = k (k + 1)$$

Untuk n = k + 1 diperoleh:

$$2 + 4 + 8 + 10 + ... 2k + [2 (k + 1)] = k (k + 1) + 2(k + 1) = (k + 1) (k + 2)$$

Ini berarti (*) benar untuk n=k+1, jadi menurut prinsip induksi matematik (*) benar untuk setiap bilangan asli n.

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Selidikilah apakah jumlah, hasil kali, selisih dan hasil bagi dua bilangan irrasional merupakan bilangan irrasional.
2. Buktikan bahwa jika a bilangan rasional dan b bilangan irrasional, maka a+b, ab, a-b dan a/b adalah bilangan-bilangan irrasional.
3. Tunjukkan bahwa jika $a < b$ dan $c > 0$, maka $ac < bc$; $a < b$ dan $c < 0$, maka $ac > bc$.
4. Tunjukkan jika $0 < a < b$ dan $0 < c < d$, maka $ac < bd$.
5. Kaji pernyataan-pernyataan berikut ini dengan menggunakan induksi matematik.
   a. $1^2 + 2^2 + 3 + ... + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$
   b. $1.2+2.3+3.4+\ldots + n (n+1) = n(n+1)(xn+2)/3$
   c. $3 + 6 + 9 + 12 + \ldots + 3n = 1\frac{1}{2}n(n+1)$
   d. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

BAB II
EKSPONENSIAL DAN LOGARITMA

2.1 FUNGSI EKSPONENSIAL

Fungsi eksponensial mempunyai banyak sekali aplikasinya dalam ilmu-ilmu terapan. "Beliau merupakan salah satu rumpun yang terpenting dalam ilmu pasti dan alam Di samping itu, fungsi eksponensial ini sangat berkaitan erat dengan fungsi logaritma sehingga telaahannya akan disatukan dalam satu bab yang sama.

Fungsi eksponensial adalah suatu fungsi yang mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$y = ka^x$ 3-1

dimana a merupakan basis konstanta dan x adalah variabel eksponensial.

Variabel eksponensial x tersebut dapat ditafsirkan sebagai suatu bilangan asli yang menyatakan berapa kali basis konstanta a muncul sebagai suatu faktor. Jika semua penerapan fungsi eksponensial melibatkan basis yang positif, maka haruslah basis konstanta $a > 0$ dan $a \neq 1$. Jika $a = 1$ maka fungsi eksponensial tersebut menjadi fungsi konstanta $y = k$ dimana atas dasar kemanfaatan dalam aplikasinya fungsi demikian kurang menarik sehingga ia harus dikeluarkan dari definisi fungsi eksponensial. Pada konstanta k, dapat diperluas sebagai bilangan nyata yang umumnya juga positif.

Variabel eksponensial x sesungguhnya dapat diperluas sehingga mencakup pangkat atau eksponensial irrasional. Dengan demikian hukum-hukum itu berlaku untuk semua eksponensial bilangan nyata.

Untuk memudahkan acuan, hukum-hukum tersebut dicantumkan dibawah ini.

Misalkan a dan b merupakan sembarang bilangan nyata positif, juga x dan y, maka:

(1) $a^x.a^y = a^{x+y}$

(2) $a^x/a^y = a^{x-y}$

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$

(4) $(ab)^x = a^x.b^x$

(5) $(a/b)^x = a^x/b^x$

(6) $a^{x/y} = \sqrt[y]{(a^x)}$

(7) $a^{-x} = 1/a^x$

(8) $a^o = 1$

Contoh 1. Hitunglah masing-masing berikut ini tanpa menggunakan kalkulator.

a. $81^{1,5} \rightarrow 81^{1,5} = 81^{3/2} = (\sqrt{81})^3 = 9^3 = 729$

b. $(0{,}75)^{-2} \rightarrow (0{,}75)^{-2} = (3/4)^{-2} = \dfrac{1}{(3/4)^2} = \dfrac{1}{(9/16)} = 16/9$

c. $81^{-3/4} \rightarrow 81^{-3/4} = 3^{4(-3/4)} = 3^{-3} = 1/(3^3) = 1/27$

Contoh 2. Sederhanakan masing-masing fungsi eksponensial berikut:

a. $y = \dfrac{6a^{8x}}{3a^{2x}} \rightarrow y = \dfrac{6a^{8x}}{3a^{2x}} = 2a^{(8x-2x)} = 2a^{6x}$

b. $y = a^{2x}(24a^{3x}) \rightarrow y = a^{2x}(24a^{3x}) = 24a^{(2x+3x)} = 24a^{5x}$

c. $y = \dfrac{12a^{-2x}(3a^{3x})}{4a^{-7x}} \rightarrow y = \dfrac{12a^{-2x}(3a^{3x})}{4a^{-7x}} = 9\dfrac{a^{(3x-2x)}}{a^{-7x}}$

$= 9a^{(3x-2x+7x)} = 9a^{8x}$

Contoh 3. Sebuah traktor seharga 100 juta rupiah yang mengalami penyusutan sebesar 25 persen per tahun. Nilai buku setelah 2 tahun diperoleh melalui fungsi eksponensial yaitu,

$S = 100.000.000\ (1-0{,}25)^2$

dimana (1 – 0,25) adalah basis konstanta, variabel eksponennya 2 dan 100.000.000 adalah suatu konstanta yang mengalikan basis. Jadi,

$S = 100.000.000(0{,}75)^2 = 56.250.000$

Contoh 4. Perusahaan dengan penjualan tahunan sekarang sebesar Rp100.000.000,- dengan tingkat pertumbuhan penjualan sebesar 18%. Dengan menggunakan fungsi eksponensial, proyeksikan penjualan dalam (4) 2 tahun mendatang. 3 tahun mendatang dan (c) 5 tahun mendatang.

$S = 100.000.000(1+0{,}18)^n$

dimana (1+0,18) adalah basis konstanta, variabel eksponen: n = 2 tahun, n = 3 tahun dan n = 5 tahun. Jadi,

Pada n = 2 tahun, $S = 100.000.000(1{,}18)^2$ = Rp139.240.000,-

Pada n = 3 tahun, $S = 100.000.000(1{,}18)^2$ = Rp164.303.200,-

Pada n = 5 tahun, $S = 100.000.000(1{,}18)^2$ = Rp228.775.775,-

Contoh 5. Dari persamaan-persamaan eksponensial berikut.

a. $2^{5+x} + 2^{5-x} = 136$ .... carilah x!

$2^{5+x} + 2^{5-x} \rightarrow 2^5.2^x + 2^5/2^x = 136$, misalkan $2^x = a$, maka

$32a + 32/a = 136$

Masing-masing ruas dikalikan dengan a.

$32a^2 – 136a + 32 = 0 \,|\, x\ 1 – 4a^2 – 17a + 4 = 0$, sehingga

$(4a – 1)(a – 4) = 0$

$a_1 = ¼$ dan $a_2 = 4$

Pada $a_1 = ¼$, $2^x = ¼$, $x = –2$

Pada $a_2 = 4$, $2^x = 4 \rightarrow x = 2$

b. $2^x + 2^{3+x} = 18$. ....Hitunglah x.

$2^x + 2^3. 2^x = 2^x + 8 . 2^x = 18$, misalkan $2^x = m$, menjadi,

$m + 8m = 18 \rightarrow 9m= 18$ diperoleh $m = 2$. Jadi,

$2 = 2$, sehingga $x = 1$.

$3^{2+x} + 9^{1+x} = 810$................. Berapakan x?

$3^2.3^x + 9.9^x = 9.3^x + 9.3^{2x} = 810$, misalkan $3^x = y$. maka

$9y + 9y^2 – 810 – y^2 + y – 90 = 0$

$(y – 9xy^2 + 10) = 0 \rightarrow y_1 – 9$ dan $y_2 = –10$ (tidak memenuhi)

Pada $y = 9$, $3^x – 9$ diperoleh $x = 2$

2.2 FUNGSI EKSPONENSIAL NATURAL

Hal yang lebih khusus, yaitu fungsi eksponensial dengan basis bilangan alam (*natural*) yang disebut fungsi eksponensial natural yang dinyatakan sebagai y ke^x. Jika fungsi eksponensial biasa menggambarkan tingkat pertumbuhan periodik (*discrete growth*) yang konstan yaitu pertumbuhan pada interval periodik seperti tahunan maka pada fungsi eksponensial natural menggambarkan tingkat pertumbuhan kontinu yang konstan (*constant rates of continous growth*).

Pendekatan yang dipakai untuk mencari bilangan natural e adalah dengan mencari hasil tim (1+1/n) di mana $n \rightarrow \infty$ (besar tak terhingga). Besarnya bilangan alam tersebut adalah 2,71828182.

Untuk $n = 1 \rightarrow (1 + 1/1)^1 = 2$

$n = 2 \rightarrow (1 + 1/2)^2 = 2,25$

$n = 3 \rightarrow (1 + 1/3)^3 = 2,37037$

$n = 4 \rightarrow (1 + 1/4)^4 = 2{,}4414063$

$n = \infty \rightarrow (1 + 1/0)^5 = 2{,}71828182$

Beberapa kaidah yang sangat penting dari fungsi eksponensial natural ini, misalkan x dan y sembarang bilangan nyata positif:

(1) $e^0 = 1$	(4) $e^x/e^y = e^{x-y}$
(2) $e^1 = 2{,}71828182$	(5) $(e^x)y^y = e^{xy}$
(3) $e^x\, e^y = e^{x+y}$	(6) $e^{x/y} = {}^y\sqrt{}(e^x)$

Contoh 6. Gunakan Lampiran-III untuk menghitung nilai masing-masing fungsi eksponensial natural berikut ini.

a. $y = e^x$	jika $x = 0{,}22$	$\rightarrow y = e^{0,22} = 1{,}2461$
b. $y = e^{3x}$	jika $x = 0{,}03$	$\rightarrow y = e^{0,09} = 1{,}0942$
c. $y = e^{0,14x}$	jika $x = 4$	$\rightarrow y = e^{0,56} = 1{,}7507$
d. $y = 2e^{2x}$	jika $x = 0{,}01$	$\rightarrow y = 2e^{0,02} = 2(1{,}0202) = 2{,}0404$

2.3 FUNGSI LOGARITMA

Suatu bilangan atau deret dengan pangkat yang cukup besar akan memakan waktu cukup lama jika dihitung secara manual. Oleh karena itu, teori tentang logaritma termasuk juga eksponensial akan sangat membantu menyederhanakan beberapa persoalan matematis sehingga suatu bilangan ataupun deret dengan pangkat yang besar dapat dihitung dengan mudah.

Logaritma x dengan suatu bilangan pokok a adalah eksponensial bilangan berpangkat yang menghasilkan x, bila y dipangkatkan dengan eksponen tersebut. Secara umum dituliskan:

$$*\log x = y \qquad 3\text{-}2$$

a adalah bilangan pokok.

Suatu logaritma x dengan basis pokok a, a > 0 adalah pangkat atau eksponensial yang akan dimiliki oleh x jika dituliskan sebagai suatu bilangan berpangkat dengan basis a. Dengan pengertian lain bahwa *'log x = y yang berarti $x = a^y$. Karena $a^y > 0$ untuk semua bilangan nyata y bila a > 0, maka haruslah x > 0.

Untuk basis a = 10, log x cukup ditulis sebagai log x saja. Fungsi logaritma dengan basis sepuluh ini dinamakan logaritma biasa. Jadi, log x = y artinya adalah $x = 10^y$.

Contoh 7. Gunakan definisi logaritma untuk menghitung:

a. ^{2}Log 8 = y – y = 3, karena $2^3 = 8$

^{3}Log 81 = y – y = 4, karena $3^4 = 81$

^{4}Log 64 = y – y = 3, karena $4^3 = 64$

^{5}Log 625 = y – y = 4, karena $5^4 = 625$

b. ^{10}Log 1000 = y + y = 3, karena $10^3 = 1000$

^{10}Log 100 = y + y = 2, karena $10^2 = 100$

^{10}log 1 = y → y = 0, karena $10^6 = 1$

^{10}log 10^{-4} = y → y = -1, karena $10^{-4} = 0{,}1$

^{10}log 10^{-2} = y → y = -2, karena $10^{3} = 0{,}01$

^{10}log 10^{-3} = y → y = -3, karena $10^{-3} = 0{,}001$

2.4 KAIDAH-KAIDAH LOGARITMA

Berikut ini diberikan sifat-sifat pokok logaritma yang sangat bermanfaat untuk memecahkan berbagai soal yang berkaitan dengan logaritma.

1. 'log a' = x 3-3

   Misal $^{a}\log a^{x} = y$. Dari rumus 3-2 diperoleh $a^x = a^y$ sehingga x = y.

   Contoh 8.

   a. $^{10}\log 1000 = {}^{10}\log 10^3 = 3$

   b. $^{10}\log 100 = {}^{10}\log 10^2 = 2$

   c. $^{10}\log 10 = {}^{10}\log 10^1 = 1$

2. $10^{^{10}\log x}$ = x (pembuktian diserahkan kepada pembaca) 3-4

   Contoh 9.

   a. $10^{^{10}\log 100} = 10^{^{10}\log}\ 10^2 = 100$

   b. $10^{^{10}\log 100} = 10^{^{10}\log}\ 10^3 == 1000$

3. log xy = log x + "log y 3-5

   Misal ($^{a}\log x = M$, diperoleh $a^M = x$) dan ($^{a}\log y = N$, $a^N = y$).

   Dengan demikian $xy = a^M \cdot a^N = a^{M+N}$. Oleh karena itu $^{a}\log xy = {}^{a}\log a^{M+N}$ dan $M + N = {}^{a}\log x + {}^{a}\log y$.

Contoh 10.

a. $^{10}\log 10.000 = {}^{10}\log (100 \times 100) = {}^{10}\log 100 + {}^{10}\log 100$

$= 2 + 2 = 4$

b. $^{10}\log 1.000 = {}^{10}\log (100 \times 10) = {}^{10}\log 100 + {}^{10}\log 10$

$= 2 + 1 = 3$

c. $^{10}\log 10 = {}^{10}\log (10 \times 1) = {}^{10}\log 10 + {}^{10}\log 1$

$= 1 + 0 = 1$

4. $^{10}\log x/y = {}^{a}\log x - {}^{a}\log y$ 3-6

Misal ($^{a}\log x = M$, diperoleh $a^{M} = x$) dan ($^{a}\log y = N$, $a^{N} = y$).

Dengan demikian $x^{M}/y = a^{M}/a = a^{M.N}$. Oleh karena itu $^{a}\log x/y = {}^{10}\log a^{M\text{-}N}$ dan M-N = $^{a}\log x - {}^{a}\log y$.

Contoh 11.

a. $^{10}\log \dfrac{10.000}{10} = {}^{10}\log 10.000 - {}^{10}10.000 = 4 - 1 = 3$

b. $\log \dfrac{2.500}{25} = {}^{10}\log 2.500 - {}^{10}\log 25 = 25 = 3{,}398 - 1{,}398 = 2$

5. $^{a}\log x^{a} = n\ {}^{a}\log x$ 3-7

Misal $^{10}\log x = M \rightarrow a^{M}$. Dengan demikian $x^{a} = (a^{M})^{a} = a^{Mn}$.

Jadi, $^{a}\log x^{n} = {}^{a}\log a^{Mn} = n^{a} \log x$.

Contoh 12.

a. $^{10}\log 100^{6} = 6\ {}^{10}\log 100 = 6.2 = 12$

b. $^{10}\log 1.000^{2} = 2\ {}^{10}\log 1.000 = 2.3 = 6$

c. $^{10}\log 10^{3} = 3\ {}^{10}\log 10 = 3.1 = 3$

6. $^{b}\log x = \dfrac{^{a}\log x}{^{a}\log b}$ 3-8

Misal $^{b}\log x = M \rightarrow b^{M} = x$ dengan mengambil log-nya $^{a}\log b^{M} = {}^{a}\log x$, diperoleh:

$$M = \frac{^{a}\log x}{^{a}\log b} \rightarrow {}^{a}\log x = \frac{^{a}\log x}{^{a}\log b} \qquad 3\text{-}9$$

a. $\frac{^{5}\log 1.000}{^{5}\log 10} = \frac{4{,}292}{1{,}431} = 3$ atau $^{10}\log 1.000 = 3$

b. $\frac{^{e}\log 1.000}{^{e}\log 10} = \frac{6{,}908}{2{,}303} = 3$ atau $^{10}\log 1.000 = 3$

7. $^{a}\log x = \frac{1}{^{x}\log a}$ (pembuktikan diserahkan kepada pembaca) 3-10

Contoh 14.

a. $\frac{1}{^{10}\log 100} = \frac{1}{2}$ atau $^{10}\log 10 = \frac{1}{2}$ karena $100^{1/2} = 10$

b. $\frac{1}{^{5}\log 100} = \frac{1}{2{,}861} = 0{,}35$ atau $^{100}\log 5 = 0{,}35$

Karena $100^{0,35} = 5$

Contoh 15. Dengan menggunakan kaidah-kaidah logaritma di atas, hitunglah x dari persamaan-persamaan logaritma berikut ini.

a. Diketahui: log(2x – 3) + log 4 – log (2x – 6) = 0

log (2x – 3) + log 4 = log (2x – 6)

log [(2x – 3 x 4)] = log (2x – 6)

(2x – 3)(4) = (2x – 6)

b. Diketahui: log x + log (x + 2) – 2 = log 0,15

log x + log (x + 2) – log 100 = log 0,15

$\log \frac{x(x+2)}{100} = \log \frac{15}{100} \rightarrow \frac{x(x+2)}{100} = \frac{15}{100}$

menjadi x(x+2) = 15 $\rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$

$(x + 5)(x - 3) = 0$

Jadi, $x_1 = -5$ dan $x_2 = 3$

c. Diketahui $^{a}\log 2x = 1 - \log 2$

$$\frac{\log 2 + \log x}{\log x} = 1 - \log 2$$

$$\frac{\log 2}{\log x} + 1 = 1 - \log 2 \qquad \frac{\log 2}{\log x} = -\log 2$$

diperoleh: $\dfrac{\log 2}{-\log 2} = \log x \rightarrow -1 = \log x$

$x = 0,1$

d. Diketahui : ${}^{a}\log (3x - 1) - ({}^{5}\log a) = 3$

${}^{a}\log (3x - 1) - ({}^{5}\log a) = 3$

$$\frac{\log(3x-1)}{\log a}\left[\frac{\log a}{\log 5}\right] = \frac{\log(3-1)}{\log 5} = 3$$

${}^{5}\log (3x - 1) = 3 \rightarrow 3x - 1 = 5^3 \rightarrow 3x - 1 = 125$

$3x = 126 \rightarrow x = 42$

2.5 FORMASI LOGARITMA

Untuk menghitung logaritma suatu bilangan yang tidak persis merupakan pangkat dari basis 10 (Brigg) maka perlu diubah ke dalam bentuk notasi ilmiah.

a. Log 123 = ……………

$123 = 1,23 \times 10^2$ (notasi ilmiah)

Dapat ditulis, log 123 $= \log (1,23 \times 10^2)$

$= \log 1.23 + \log 10^2$

$= \log 1.23 + 2 \log 10$

$= \log 1.23 + 2$

Dari daftar logaritma Lampiran-1 log 1.23=0.0899. Jadi,

log 123 = 0,0899 + 2 = 2.0899

mantisa karakteristik

b. Log 0,00144 = ……………

$0,00144 = 1,44 \times 10^{-3}$ (notasi ilmiah)

Menjadi log, 0,00144 $= \log (1,44 \times 10^{-3})$

$= \log 1.44 + \log 10^{-3}$

$= \log 1.44 + 3 \log 10$

$= \log 1.44 + 3$

Dari daftar logaritma $= \log 1.44 = 0,1584$. Jadi,

$$\log 0{,}00144 = 0{,}1584 - 3 = a - 2.8416$$

mantisa ⌋ ⌊ karakteristik

2.6 LOGARITMA NATURAL

Seperti halnya eksponensial natural, pada fungsi logaritma juga dikenal dengan istilah logaritma natural (Noperian) yaitu logaritma dengan bilangan pokok (e = 2,71828182) yaitu y = ${}^{e}\log x$. Sering untuk memudahkan penulisan, logaritma natural cukup ditulis *In x*.

Beberapa kaidah yang penting dari logaritma natural ini, misalkan x dan y sembarang bilangan nyata positif:

(1) In e = 1

(2) In 1 = 0

(3) In (1/e) = – 1

(4) In e' = x

Contoh 16. Dengan menggunakan Lampiran-II. carilah logaritma natural berikut ini.

a. In 0,44 = -0,8210

b. In 4,41 = 1,4839

c. In 5,55 = 1,7138

d. In 44 = ………*)

e. In 441 = ………*)

f. In 4410 = ………*)

Pada Lampiran-II,…..*) tidak diberikan secara eksplisit sehingga untuk mencarinya dapat dilakukan sebagai berikut:

In 44,1 = In (14,41 x 10) in 4,41 + ln 10

= 1,48387 + (2,30259) = 3.7865

Dengan metode yang sama.

a. In 4410 = In (4.41 x 10^2) = In 4,41 + 2 In 10

= 1,48387 + 2(2,30259) = 6,0890

b. In 4410 = In (4.41 x 10^2) = In 4,41 + 3 In 10

= 1,48387 + 3(2,30259) = 8,39163

2.7 ANTI LOGARITMA

Proses pencarian antilogaritma merupakan kebalikan dari proses mencari logaritmanya. Jika diberikan log x 5,1987 maka untuk menghitung harga x, artinya sama dengan proses pencarian anti-logaritma 0,1987 yaitu x = antilog 5.1987. Dengan menggunakan tabel logaritma (Lampiran-1) tetapkan mantisa yang bersesuaian dengan 0.1987 yaitu x = 158 dan karakteristiknya (5 sebagai eksponen 10). Jadi, x = antilog 5,1987 = 1.58 x 10 = 158.000

Contoh 17. Hitunglah x, jika diketahui:

a. log x = 1,4757

x = antilog 1,4757

= antilog (0,4757 + 1) $\rightarrow$ mantisa 0,4757 = 2,99

karakteristik 1 = 10

Jadi, x = antilog 1,4757 = 2,99 x 10 = 29,9

b. log x = -0,4449

x = antilog – 0,4449

= antilog (0,551 – 1) $\rightarrow$ mantisa 0,5551 = 3,59

karakteristik -1 = 0,1

Jadi, x = antilog -0,4449 = 3,59 x 10^{-1} = 0,359

c. log x = –2.3925

x = antilog – 2,3925

= antilog (0,6075-3) $\rightarrow$ mantisa 0,6075 = 4,05

karakteristik -3 = 0,001

Jadi, x = antilog -2,3925 = 4,05 x 10^{-3} = 0,00405

Contoh 18. Hitunglah y, jika diketahui:

a. y = 100%

log y = log 100 + 0,5 log e = 2 + 0,5 (0,43429) = 2,21714

y = antilog 2.21715 = 164,87

b. In 400 = $150^{0,3y}$

In 400 = In 150 + 0,3y

$$y = \frac{\text{In } 400 - \text{In } 150}{0,3} = \frac{5,9915 - 5,0106}{0,3}$$

$$= \frac{0,9809}{0,3} = 3,2697$$

2.8 HUBUNGAN FUNGSI EKSPONENSIAL DAN FUNGSI LOGARITMA

Di dalam pasal ini, akan diberikan beberapa contoh soal yang menyangkut bagaimana kemanfaatan sifat-sifat eksponensial dan logaritma yang dapat digunakan untuk memecahkan persamaan yang mengandung peubah-peubah dalam logaritma atau eksponensial.

Seperti yang telah dijelaskan pada pasal sebelumnya yaitu fungsi logaritma merupakan fungsi balikan dari fungsi eksponensial yang direpresentasikan sebagai: $^{a}\log x = y$ dan fungsi eksponensial balikannya adalah $y = a^{x}$. Sebaliknya jika ditentukan fungsi eksponensial $y = a^{x}$, maka log y dengan basis a harus sama dengan x yaitu $^{a}\log y = x$.

Contoh 19. Hubungan fungsional antara fungsi logaritma dan fungsi eksponensial diilustrasikan sebagai berikut ini.

a. $^{a}\log y = 12x$

   log di atas menunjukkan bahwa 12x merupakan pangkat dimana a harus dipangkatkan untuk mendapatkan y Dengan demikian fungsi eksponensial balikannya adalah $a^{12x} = y$. Dengan cara yang sama dapat juga dicari hubungan kedua

b. Jika $^{10}\log y = 4a$ maka $y = 10^{4a}$

   Jika $^{10}\log y = 2t$ maka $y = x^{2t}$

   Jika In y $= 3t$ maka $y = e^{3t}$

   Jika In y $= 6t + 1$ maka $y = e^{6t+1.}$

   Jika In 12 $= 2{,}4849$ maka $12 = e^{2,4849}$

   Jika In 1,2 $= 0{,}18232$ maka $1.2 = e^{0,18232}$

c. Jika $y = 10\%$ maka $^{10}\log y = 4a$

   Jika $y = x^{2t}$ maka $^{x}\log y = 2t$

   Jika $y = e^{3t}$ maka In $y = 3t$

   Jika $y = e^{6t+1}$ maka In $y = 6t + 1$

   Jika $12 = e^{2,4849}$ maka In $12 = 2{,}4849$

   Jika $1{,}2 = e^{0,18232}$ maka In $1{,}2 = 0{,}18232$

2.9 FUNGSI HOMOGEN

Di dalam ilmu ekonomi, fungsi homogen ini banyak dipakai untuk analisis hubungan fungsional antara input dan output produksi yang dirumuskan oleh Cobb

Douglas. Output adalah hasil produksi dan input merupakan faktor-faktor produksi yang digabung dalam suatu proses produksi sehingga dapat dihasilkan sejumlah output produksinya.

Suatu fungsi produksi dikatakan homogen, jika setiap faktor input dikalikan dengan konstanta k (k bilangan riil positif) dapat difaktorkan ke luar secara keseluruhan.

Derajat homogenitas suatu fungsi mulai dari nol sampai dengan n. Ada dua sifat mengenai fungsi homogen yaitu:

1. Untuk fungsi homogen yang berderajat nol, jika dikalikan dengan bilangan k, maka fungsinya tetap
2. Untuk fungsi homogen berderajat n, jika fungsi homogen tersebu dikalikan dengan k, maka fungsi tersebut akan berubah sebanyak k kali. Secara matematis, fungsi homogen z = f(x,y) homogen berderajat n, jika untuk semua harga riil positif k adalah $f(kx, ky) = k^0 f(x,y)$.

Contoh 20. Derajat homogenitas suatu fungsi dapat diikuti dari uraian-uraian di bawah ini:

a. Fungsi $f(x,y) = 4x/y$

   Bila dikalikan dengan bilangan riil positif k. maka dapat dilihat pengaruhnya yaitu:

   $$f\,(kx, ky) \quad = \frac{4kx}{ky} = (k/k)\,\frac{4x}{y}$$

   $$= k^0 f(x,y) \text{ di mana } k/k = k^{-0} = 1$$

   Fungsi tersebut merupakan fungsi homogen berderajat 0, karena perkalian dengan bilangan k pada f(x,y) menghasilkan k = 1 dan fungsi f(x,y) tetap.

b. Fungsi $f(x,y,z) = x – y + 3z$

   Bila dikalikan dengan bilangan riil positif k, maka:

   $f(kx,ky,kz) = kx – ky + 3kz = k(x – y + 3z)$

   $= kf(x,y,z)$

   Fungsi tersebut merupakan fungsi homogen berderajat 1.

c. Fungsi $f(x,y) = x^2 + 6xy + y^2$

   Bila dikalikan dengan bilangan riil positif k, maka:

   $f(kx.ky) \quad = (kx)^2 + 6(kx)(ky) + (ky)^2 = k^2(x^2 + 6xy + y^2)$

   $= k^{-2}f(x,y)$

Fungsi tersebut merupakan fungsi homogen berderajat 2.

d. Fungsi $f(x,y) = 2x^{04}y^{02}$

Bila dikalikan dengan bilangan riil positif k, maka:

$F(kx,ky) = 2(kx)^{0,4} (ky)^{0,2} = 2k^{0,4+0,2}x^{0,4}y^{00,3}$

$= k^{0,6} f(x,y)$

Fungsi tersebut merupakan fungsi homogen berderajat < 1.

e. Fungsi f(K.L) $K^{0,5}$ $L^{0,6}$.

Bila dikalikan dengan bilangan riil positif k, maka:

$f(kK,kL) = (kK)^{0,6} (kL)^{0,6} K^{0,5+0,6}K^{-0,5}L^{0,6}$

$= k^{1,1} f(K.L)$

Fungsi tersebut merupakan fungsi homogen berderajat > 1.

f. Fungsi $f(x,y,z) = x^2 – xy^2$

Bila dikalikan dengan bilangan ril positif k, maka:

$f(kx,ky) = (kx)^2 – (kx)(ky)^2 = k^2(x^2 – kxy^2)$

Perkalian dengan bilangan k menghasilkan $k^2(x^2 - kxy^2)$, dan ini tidak sama perkalian k dengan fungsi yang tetap $k^2(x^2 – kxy^2) \neq k^2(x,y)$. Fungsi tersebut bukan merupakan fungsi homogen.

2.10 RETURN TO SCALE

Suatu fungsi produksi akan memperlihatkan *return to scale* yang konstan yaitu jika semua input produksi dinaikkan dengan proporsi tertentu k, maka output akan naik dengan proporsi yang sama. Jika output naik dengan proporsi > k. maka terjadi *return to scale* menaik dan sebaliknya jika output turun dengan proporsi < k maka terjadi *return to scale* menurun.

Suatu fungsi produksi Cobb-Douglas dinyatakan dalam bentuk yang umum yaitu Q = AK L (di mana A konstanta positif. K dan L masing-masing input modal dan tenaga kerja serta α,ß mempunyai nilai > = < 1). Dengan demikian, derajat homogenitas dan *return to scale* dapat dicari yaitu:

$f(kk,kL) = A(KK)^{\alpha} (KL)^{\beta}$

$= Ak^{\alpha\beta}K^{\alpha}L^{\beta}$

$= k^{\alpha}Q$ 3-11

Jika, $\alpha + \beta = 1$, *return to scale* konstan

$\alpha + \beta > 1$, *return to scale* menaik

$\alpha + \beta < 1$, *return to scale* menurun

Contoh 21. Tentukan derajat homogenitas dan *return to scale* untuk masing-masing fungsi produksi berikut ini:

a. $Q = 2x^2 – xy + y^2$

F(kx.ky) $= 2(kx)^2 – (kx)(ky) + (ky)^2$

$= k^2(2x^2 – xy + y^2)$

$= k^2(Q)$

Jadi, Q adalah fungsi berderajat 2 dan *return to scale* menaik

b. $Q = x + 3y$

f(kx.ky) $= (kx) + 3ky)$

$= k(Q)$

Jadi, Q adalah fungsi berderajat 1 dan *return to scale* konstan.

c. $Q=215K^{0,2} L^{0,3}$

f(kK,kL) $= 215(kK)^{0,2} (kL)^{0,3} = 215k^{0,7}L^{0,5}$

$= k^{1,2}f(K,L)$

$= k^{1,2}(Q)$

Jadi Q adalah fungsi berderajat > 1 dan *return to scale* menaik.

d. $Q = 300K^{0,7} L^{0,5}$

f(kK,kL) $= 300(kK)^{0,7} (kL)^{0,5} = 300k^{0,7+0,5} K^{0,7} L^{0,5}$

$= k^{1,2}f(K,L)$

$= k^{1,2}(Q)$

Jadi Q adalah fungsi berderajat > 1 dan *return to scale* menaik.

Contoh 22. Fungsi produksi dicerminkan dalam persamaan $Q = 100K^{0,2} L^{0,4}$ dimana K= 30 dan L = 70. (a) Tentukan derajat homogenitas dan *return to scale* dan (b) Hitunglah besarnya Q tersebut.

a. $Q = 100K^{0,2} \; L^{0,4}$

f(kK.kL) $= 100(kK)^{0,2} (kL)^{0,4} = 100K^{0,2+0,4}K^{0,2}L^{0,4}$

$= k^{0,6}f(K,L)$

$= k^{0,6}\,Q$

Jadi, Q adalah fungsi berderajat 1 dan *return to scale* menurun.

b. $Q = 100(30)^{0,2}\,(70)^{0,4}$

Log Q $= \log 100 + 0,2 \log 30 + 0,4 \log 70$

$= 2 + 0,2\,(1,4771) + 0,4\,(1,8451)$

$= 2 + 0,2954 + 0,7380$

$= 3.0334$

$Q = \text{antilog}\,(3,0334) = 1.080$

Contoh 23. Fungsi produksi Q- 10K 1. dimana K = 100 dan L = 100. (a) Tentukan derajat homogenitas dan return to scale dan (b). Hitunglah besarnya Q tersebut.

a. $Q = 10K^{0,5}\,L^{0,5}$

f(kK.kL) $= 10(kK)^{0,5}\,(kL)^{0,5} = 10k^{0,5+0,5}\,K^{0,5}L^{0,5}$

$= k^1 f(K,L.)$

Jadi, Q adalah fungsi berderajat 1 dan *return to scale* konstan.

b. $Q = 10(100)^{0,5}(100)^{0,5}$

$\log Q = \log 10 + 0,5 \log 100 + 0,5 \log 100$

$= 1 + 0,5(2) + 0,5(2)$

$= 1 + 1 + 1$

$= 3$

$Q = \text{antilog}\ 3 = 1.000$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Hitunglah masing-masing berikut ini tanpa menggunakan kalkulator.

a. $125^{1/3}$	b. $(0,125)^{-1/3}$	c. $100^{-3/2}$	d. $64^{5/6}$
e. $0,008^{-1/3}$	f. 10^5	g. $(3/2)^{-4}$	h. $32^{0,6}$

2. Hitunglah dengan kalkulator sampai perseribu terdekat (tiga angka di belakang titik desimal).

a. $2,42^{0,85}$	b. $1,212^{1,212}$	c. $0,5^{-3,5}$	d. $1,75^{-0,75}$
e. $1,4^{-1,4}$	f. $20^{0,75}$		

3. Sederhanakan masing-masing fungsi eksponensial berikut

   a. $y = \frac{6a^{8x}}{3a^{2x}}$ b. $y = \frac{2m^{-5x}(8m^{3x})}{4m^{-8x}}$

   c. $y = \frac{-12a^5b^6}{3a^{-7}b^{-8}}$ d. $y = \frac{3a^{5/6}b^{1/3}}{a^{-3/6}b^{1/6}}$

4. Carilah harga x dari persamaan-persamaan fungsi eksponensial dan fungsi logaritma berikut ini.

   a. $2^{2x+1} + 2^{x+1} = 16$

   b. $3^x + 3^{3-x} = 28$

   c. $x^{\log 5x} = 125\ (x)$

   d. ${}^2\log {}^2\log x = {}^2\log (10 – 2 \log x) + 1$

5. Hitunglah: a) log xy, b) log x^2y, c) In xy^2, d) log x/y, e) In xy jika diketahui x = 50 dan y = 100.

6. Carilah x, jika: a) log x = 2.69897; b) log x^2 = 2,79588

   c) In x = 3,21887; d) In x^2 = 1,60944

7. Jelaskan derajat homogenitas fungsi-fungsi berikut:

   a. $f(x,y) = 3x^2 + 8xy-y^2$ d. $f(K.L) = 800K^{0,2}L^{0,8}$

   b. $f(x,y,z) = x + 5y – z^2$ e. $f(K,L) = 130K^{0,5}L^{0,5}$

   c. $f(x,y) = 200x^{0,5}\ y^{0,1}$ f. $f(K,L) = 101K^{0,9}L^{0,1}$

8. Tentukan derajat homogenitas, *return to scale* dan hitunglah besarnya Q masing-masing fungsi produksi Cobb-Douglas berikut ini.

   a. $Q =10.000K^{0,1}\ L^{0,6}$ untuk K = 10 dan L = 50

   b. $Q = 20.000K^{0,2}\ L^{0,7}$ untuk K = 20 dan L = 40

   c. $Q = 30.000K^{0,3}\ L^{0,7}$ untuk K = 30 dan L = 30

   d. $Q = 40.000K^{1,4}\ L^{0,8}$ untuk K = 40 dan L = 20

   e. $Q = 50.000K^{0,5}\ L^{1,0}$ untuk K = 50 dan L = 10

BAB III
DERET

3.1 KONVERGENSI DERET

Deret adalah jumlah beruntun dari suku-sukur yang merupakan jajar. Jajar adalah deretan bilangan bilangan atau fungsi-fungsi yang satu sama lain bervariasi secara teratur. Jadi untuk deret a_1, a_2, a_3,…….,a_e, merupakan suatu jajar. Sedangkan untuk jumlah $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots .. + a_n$ membentuk suatu deret.

Dilihat dari banyaknya suku yang membentuknya, suatu deret dibedakan menjadi dua yaitu deret berhingga dan deret tak terhingga. Deret berhingga adalah deret yang jumlah suku-sukunya terbatas sampai saatu suku ke-n saja yaitu:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_n \qquad 4\text{-}1$$

Deret tak terhingga adalah deret yang jumlah suku-sukunya tidak terbatas. Deret tak terhingga S tidak lain adalah:

$$S_n = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad 4\text{-}2$$

Dengan suku-suku yang positif, S_n akan semakin besar untuk nilain yang makin besar. Akan tetapi meskipun n tak terhingga, S_n belum tentu menjadi tak terhingga. Suatu deret dikatakan divergen apabila S_n menjadi tak terhingga dan sebaliknya dikatakan konvergen jika dengan n tak terhingga, S, bukannya tak terhingga melainkan akan mendekati suatu harga tertentu.

Dari uraian diatas dapat dijelaskan bahwa deret akan divergen apabila suku-sukunya semakin besar yaitu $a_{n+1} > a_n$. Tetapi sebaliknya dengan suku-suku yang semakin kecil $a_{a+1} < a_n$ deret yang terbentuk belum tentu konvergen.

Contoh 1. Kajilah konvergensi suatu deret berikut ini:

$$S = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots\ldots\ldots\ldots..$$

Dengan mengelompokkan suku-sukunya akan diperoleh deret baru yaitu:

$$S = 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + (................)$$

Hasil pengelompokkan akan terlihat bahwa:

$$S > 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots\ldots\ldots..$$

yang berarti bahwa S-deret divergen.

Contoh 2. Kajilah konvergensi suatu deret berikut ini:

$S = a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots\ldots\ldots$

Untuk $a < 1$ deret diatas tidak lain adalah deret yang harganya mendekati harga tertentu yang dapat dicari. Penyelesaian deret diatas diperoleh dengan cara mengalikan deret itu dengan a dan kita peroleh deret baru.

$aS = a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \ldots\ldots..$

$aS = S - a$

$S = \frac{a}{1-4}$ deret konvergen 4-3

3.2 DERET HITUNG

Deret hitung adalah suatu deret yang mempunyai watak bahwa beda atau selisih antara dua suku yang berturutan selalu konstan, $a_n - a_{n-1} = b$.

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots\ldots.. a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$

dengan: $a_2 - a_1 = b$ atau $a_2 = a_1 + b$

$a_3 - a_2 = b$ atau $a_3 = a_2 + b$

$a_4 - a_3 = b$ atau $a_4 = a_3 + b$

$a_{n-1} - a_{n-2} = b$ atau $a_{n-1} = a_{n-2} + b$

$a_n - a_{n-1} = b$ atau $a_n = a_{n-1} + b$

Dari rumusan-rumusan di atas, maka untuk menyatakan suku ke-n dari deret hitung tersebut adalah:

$a_n = a_1 + (n-1)b$ 4-4

Jumlah n suku dari deret hitung yang disimbolkan dengan S_n dan menambahkan masing-masing sehingga:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_3 + a_2 + a_1$

______________________________ +

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_{n-2}) + \ldots\ldots + (a_n + a_1)$

Untuk: $a_2 = a_1 + b$ $a_3 = (a_1 + b) + b$

$a_{n-1} = a_n - b$ $a_{n-3} = (a_n - b) - b$

____________ + ____________ +

$a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$ $a_3 + a_{n-2} = a_1 + n_n$

Dengan menyempurnakan kembali, maka harga-harga dari 2S, dapat dituliskan sebagai:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (a_1 + a_n)$

$2S_n = n(a_1 + a_n)$

$S_n \;= ½\, n(a + a_n)$ 4-5

5. $S_n = ½\, n(a + a_n)$

5. $b_1 = \dfrac{b}{m+1}$

5. $S_n - S_{n-1} = a_n$

5. $n_1 = n + (n - 1)m$

5. $\pi\, a_n = a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_n$

5. $1 - a_1 = c - t$ atau $t = ½\,(a_1 + c)$ jika a_1 dan c deret hitung

dengan :

a = suku pertama	m = banyaknya suku sisipan
b = beda suku	t = suku tengah
b_1 = beda suku baru	π = hasil kali suku-suku
n = banyaknya suku	a_n = suku ke-n
n_1 = banyaknya suku baru	S_n = jumlah suku ke-n

Contoh 3. Tiga bilangan membentuk deret hitung. Jika jumlah ketiga bilangan tersebut 60 dan hasil kalinya 6000. Tentukan bilangan tersebut.

Misalkan bilangan-bilangan itu adalah a-b, a, a+b.

$S_n = (a - b) + a + (a + b)$

$60 = 3a \rightarrow a - 20$

$\pi\, a_n = (a - b).a.(a + b) = a(a - b) = 6000$

pada a = 20, $20(20^2 - b^2) = 6000$

$8000 - 20b^2 = 6000$

$20b^2 = 2000$

$b^2 = 100$ diperoleh $b = \pm 10$

untuk $b = +10 \rightarrow a_1 = 10$, $a_2 = 20$ dan $a_3 = 30$

untuk $b = -10 \rightarrow a_1 = 30$, $a_2 = 20$ dan $a_3 = 10$

Contoh 4. Sebuah deret hitung terdiri atas 10 buah suku. Jumlah tiga suku yang terakhir 27 dan jumlah tiga suku yang pertama sama dengan 6. Carilah deret hitung tersebut dan tentukan jumlah semua sukunya.

$a_8 + a_9 + a_{10} = 27.$

$(a + 7b) + (a + 8b) + (a + 9b) = 27$

$3a + 24b = 27$

$a + 8b = 9$ ....1)

$a_1 + a_2 + a_3 = 6$

$a + (a + b) + (a + 2b) = 6$

$3a + 3b = 6$

$a + b = 2$ ....2)

Dari persamaan 1) dan 2) diperoleh $7b = 7 \rightarrow b = 1$, sehingga $a = 1$

Deret tersebut adalah: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Jumlah semua deret: $S_n = ½\, n\, (a_1 + a_n)$

$= ½\, n\, (1 +10) = 55$

Contoh 5. Dalam sebuah deret hitung, suku pertama sama dengan 0. Seda suku b = 6 dan banyaknya suku n = 10. Antara tiap dua suku berurutan disisipkan 3 bilangan sehingga terjadi lagi sebuah deret hitung yang baru. Hitunglah deret itu!

Diketahui: a = 0, b = 6, n = 10 dan m = 3

$n_1 = n + (n – 1) = 10 + (10 – 1)\, 3 = 37$

$$b_1 = \frac{b}{m+1} = \frac{6}{3+1} = 1{,}5$$

$a_{n1} = a + (n_1 – 1)\, b_1 = 0 + (37 – 1)\, 1{,}5 = 54$

Jumlah deret hitung yang baru S_{n1} $= ½\, n_1\, (a + a_{n1})$

$= ½\, 37\, (0 + 54) = 999$

Contoh 6. Dalam sebuah deret hitung, jumlah suku $S_4 = 17$ dan $S_8 = 58$. Tentukanlah suku ke-25.

$S_4 = ½\, 4\, (a_1 + a_4) = ½\, 4\, (a_1 + a_1 + 3b)$

$= 2\, (2a_1 + 3b) = 17$

$17 = 4a_1 + 6b$................. 1)

$S_8 = ½\, 8\, (a_1 + a_8)\, ½\, 4\, (a_1 + a_1 + 7b)$

$= 4\ (2a_1 + 7b) = 58$

$58 = 8a_1 + 28b$.................. 2)

Persamaan: 1) dan 2) $17 = 4a_1 + 6b \rightarrow \quad 34 = 8a_1 + 12b$

$58 = 8a_1 + 28b \rightarrow \quad 58 = 8a_1 + 28b$

$-24 = -16b$ dan $b = 1{,}5$

dengan memasukkan nilai b pada persamaan 1) diperoleh:

$17 = 4a_1 + 6\ (1{,}5) \rightarrow 4a_1 = 17 – 9$ sehingga $a_1 = 2$

Jadi, suku ke-25 adalah $a_{25} = a_1 + (25 – 1)\ b = 2 + (24)\ 1{,}5 = 38$.

Contoh 7. Student ng pertama sama dengan 3, suku terakhir 87. Jika suku ke-6 ditambah dengan suku ke-7 sama denan 39, hitunglah jumlah deret hitung tersebut.

Diketahui $a = 3$ dan $a_n = 87$

$a_6 + a_7 = (a + 5b) + (a + 6b)$

$39 \quad = 2a + 11b$ untuk $a = 3 \rightarrow 11b = 39 – 2(3) \rightarrow b = 3$

Dengan mensubstitusikan harga b, maka:

$a_n = a + (n – 1)b$

$87 = 3 + (n – 1)3 \rightarrow 87 = 3 + 3n – 3$ diperoleh $n = 29$

Jumlah deret hitung: $S_n = ½\ n\ (a + a_n) = ½\ 29\ (3+87)$

$= 1305$

3.3 DERET UKUR

Deret akar adalas dent yang mempunyai sifat bahwa hasil bagi untuk dua suku yang berurutan selalu konstan, dengan syarat tidak boleh ada suku yang bernilai sama dengan nol. Pernyataan ini dapat ditulis yaitu : $a_n : a_{n-1} = p$,. dengan $a_n \neq 0$.

$a_1, a_2, a_3, a_4,$...................., a_{n-2x}, a_{n-1}, a_n

dengan, $a_2 \quad : a_1 = p$ atau $a_2 \quad = a_1 p$

$a_3 \quad : a_2 = p$ atau $a_3 \quad = a_2 p = a_1 p^2$

$a_4 \quad : a_3 = p$ atau $3_4 \quad = a_3\ p = a_2 p^2 = a_1 p^3$

$a_{n-1} \quad : a_{n-2} = p$ atau $a_{n-1} \quad = a_{n-2} p = a_1 p^{e-2}$

$a_n \quad : a_{n-1} = p$ atau $a_n \quad = a_{n-1}p = a_1p^{n-1}$

dari rumusan-rumusan di atas, maka untuk menyatakan suku ke-n dari deret ukur tersebut adalah

$a_n = a\text{-}p^{n+1}$ 4-6

Jumlah n suku dari deret ukur yang disimbolkan dengan S_n dan menambahkan masing-masing:

$$S_a = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$= a_1 + a_1\, p + a_1\, p^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1.p^{n-3} + a_1.p^{n-2} + a_i.p^{n-1}$$

$$= a_1 \,.\, (1 + p + p^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p^{n-3}\, p^{n-2} + p^{n-1})$$

Dengan mengalikan (p – 1) pada masing-masing ruas:

$$S_n.(p-1) = a_1\, (1 + p + p^2. + \ldots\ldots\ldots\ldots + p^{n-3} + p^{n-2} + P^{n-1})\, .\, (p-1)$$

$$= a_1 \,.\, [(p + p^2 + p^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p^{n-2} + p^{n-1} + p^n) - (1 + p + p^2)$$
$$+ \ldots\ldots + p^{n-3} + p^{n-2} + p^{n-1})$$

$$= a_1\, (p^n - 1)$$

$S_n = a\, \dfrac{p^n - 1}{p - 1}$ p > 0 deret ukur naik 4-7

$S_n = a\, \dfrac{1 - p^n}{1 - p}$ p > 0 deret ukur naik 4-8

Berikut ini disajikan rumus-rumus deret ukur:

1. $n = n + (n-1)m$
2. $pi = p^{1/(m-1)}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-p}$
4. $a : b = b : c$ atau $b^2 = a.c$ (a dan c deret ukur)

Dengan:	a = suku pertama	p = perlipatan
	b = banding tengah	p_1 = perlipatan baru
	b_1 = beda suku baru	t = suku tengah
	n = banyaknya suku	a_n = suku ke-n
	n_1 = banyaknya suku baru	S_a = jumlah suku ke-n

Contoh 8. Tiga bilangan akan membentuk sebuah deret ukur. Jumlah ketiga bilangan itu adalah 620. Sedangkan hasilkali ketiganya 1.000.000. Tentukanlah ketiga bilangan itu?

$a + ap + ap^2 = 620$ dan $a.ap \cdot ap^2 = 1.000.000$

$(ap)^3 = 1.000.000$

$(ap) = 100 \rightarrow p = 100/a$

Dari harga p ini kemudian dimasukkan ke dalam persamaan di atas sehingga:

$a + 100 + 10.000/a = 620$

$a^2 + 100a + 10.000 = 620a$

$a^2 – 520a +10.000 = 0 \rightarrow (a – 20)(a – 500) = 0$

Pada $a_1 = 20$, p= 100/20 = 5

Pada $a_2 = 100$, p= 100/500 = 1/5

Jadi, ketiga bilangan itu adalah 20, 100, 500 atau 500, 100, 20

Contoh 9. Deret ukur dengan suku pertama sama dengan 64 dan suka ketiga sama dengan 16. Hitunglah jumlah enam suku dari deret ukur tersebut.

$a = 64$ dan $ap^2 = 16$

$64p^2 = 16 \rightarrow p^2 = 1/4$ sehingga $p = \pm\frac{1}{2}$

Dari data di atas menunjukkan bahwa deret termasuk deret ukur naik dan juga deret ukur turun sehingga jumlah suku ke-6 adalah:

Pada $p = \frac{1}{2}$, $\quad S_6 = a\dfrac{p^6 - 1}{p - 1} = 64\dfrac{(\frac{1}{2})^6 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 126$

Deret tersebut adalah: 64, 32, 16, 8, 4 dan -2

Pada $p = \frac{1}{2}$, $\quad S_6 = a\dfrac{1 - p^6}{1 - p} = 64\dfrac{1 - (\frac{1}{2})^6}{1 - \frac{1}{2}} = 42$

Deret tersebut adalah: 64, -32, 16, -8,4 dan -2

Contoh 10. Hitunglah sampai dua digit angka di belakang koma dari deret Ukur:

$1 + 1.16 + 1.16^2 + 1.16^3 + \ldots\ldots\ldots + 1.16^8$.

Pada a = 1 dan ap = 1.16 diperoleh p = 1,16 > 0 (deret ukur naik)

$$S = a\frac{p^6 - 1}{p - 1} = 1\frac{(1{,}16)^9 - 1}{1{,}16 - 1}$$

I. Dengan logaritma, misal $x = 1.16^9 \rightarrow \log x = 9 \log 1{,}16$

$= 9\ (0,0644) = 0,5796$

$x = \text{antilog } 0,5796 = 3,798$

$$S_n = \frac{3,798 - 1}{0,16} = 17,49 \text{ (kurang teliti)}$$

II. Dengan menggunakan Lampiran-IV diperleh $1,16^9 = 3,8030$

$$S_n = \frac{3,803 - 1}{0,16} = 17,51$$

Contoh 11. Seperti pada contoh 10, hitunglah sampai empat digit dari deret ukur $1,15 + 1,15^2 + 1,15^3 + \ldots\ldots. + 1.15^{12}$.

Deret dapat ditulis $1,15\ (1 + 1,15 + 1,15^2 + \ldots\ldots\ldots + 1,15^{11})$

menjadi a = 1 dan ap= 1,15 diperoleh p = 1,15 > 0 (deret ukur naik)

$$S_n = (1,15)\ a\frac{p^n - 1}{p - 1} = (1,15)\ \frac{(1,15)^{12} - 1}{1,15 - 1}$$

I. Dengan logaritma, misal $x = 1,15^{12} \rightarrow \log x = 12 \log 1,15$

$= 12\ (0,0644) = 0,7284$

$x = \text{antilog } 0,7284 = 5,3503$

$$S_n = (1,15)\ a\frac{5,3503 - 1}{0,15}$$

$= 33,3523$

II. Dengan menggunakan Lampiran III $1,15^{12} = 5.3503$

$$S_n = (1,15)\ \frac{5,3503 - 1}{0,15} = 33,3523$$

Contoh 12. Diketahui saat deret okur turun tak terhingga di mana $a_1 - a_3 = 3$ dan ${}^2\log a_1 + {}^2\log a_1 + {}^2\log a_1\ 3$. Hitunglah jumlah deret itu.

$a - a_3 = 3 \rightarrow a - ap^2 = 3$

$a(1 - p^2) = 3 \ldots\ldots 1)$

untuk ${}^2\log a + {}^2\log ap + {}^2\log ap^2 = 3 \rightarrow {}^2\log (ap)^3 = 3$

bentuk ${}^2\log (ap) = 3$ dapat juga ditulis $2^3 = (ap)^3$

$ap = 2, \rightarrow p = 2/a$

dengan memasukkan p = 2/a pada persamaan 1) diperoleh:

$a\{1 - (2/a)^2\} =$ $\rightarrow a(1 - 4/s^2) = 3$

$\rightarrow a - 4/a - 3 = 0$

dikalikan a menjadi $\rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0$

$(a + 1)(a - 4) = 0$ $a_1 = -1$ dan $a_2 = 4$

Pada a = 4, maka p = 2/4 = ½. Jadi jumlah deret ukur tersebut adalah:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-p} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

Contoh 13. Deret ukur 1, 4, 1/2, 2, 1/4, 1, 1/8, 1/2, 1/16, 1/4, ………

Hitunglah deret akur tak terhingga tersebut.

I. 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, …………

II. 4, 2. 1. 1/2, 1/4, ………….

$S_n = S_1 + S_n$

I. $\text{Pada a} = 1, \text{p} = \frac{1}{2} \rightarrow S_1 = \frac{\text{a}}{1 - \text{P}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

II. $\text{Pada a} = 4, \text{p} = 1/2 \rightarrow S_{II} = \frac{\text{a}}{1 - \text{p}} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$

Jadi, jumlah deret tersebut adalah $S_{II} = 2 + 8 = 10$.

3.4 DERET HARMONIK

Deret harmonik adalah beberapa bilangan jika “kebalikan” bilangan-bilangan itu membentuk deret hitung

7. $x_1, x_2, x_3, x_4,$ ....Deret Hitung
8. $1/x_1, 1/X_2, 1/x_3, 1/x_4,$..................... Deret Harmonik
9. (a-b), a, (a+b), (a+2b)......................Deret Hitung
10. 1/(a-b), 1/a, 1/(a+b), 1/(a+2b) .... Deret Harmonik
11. Deret harmonik dapat juga disebut, jika tiga buah suku berturut-turut (a_1, a_2, a_3) akan membentuk :

$$\frac{(a_1 - a_2)}{(a_2 - a_3)} = \frac{a_1}{a_3} \qquad 4\text{-}9$$

12. Atau dapat juga membentuk 1/a, -1/,= 1/-1, sehingga kebalikannya akan membentuk suatu deret hitung yaitu:

$$a_1 - a_2 = a_2 - a_3 \text{ dan } a_1 + a_3 = 2a_2 \qquad 4\text{-}10$$

13. Untuk suku ke-n, jika diketahui a_1 dan a_2 suatu deret harmonik maka dapat dipakai rumus:

$$a_n = \frac{a_1 \, . \, a_2}{(n-1)a_1 - (n-2)a_2} \qquad 4-11$$

14. Suatu bilangan x adalah berbanding-tengah-harmonik, antar bilangan-bilangan a dan b yaitu jika a dan b positif dan dalam urutan ini membentuk deret harmonik, maka dapat diturunkan:

$$1/a - 1/x = 1/x - 1/b \; atau \; x = \frac{2ab}{2+b} \qquad 4-12$$

Contoh 14. Diketahui, suatu deret harmonik dengan suku pertama sama dengan 4 dan suku kedua a_2 sama dengan 6. Tentukan a_3 dan a_n.

$$\frac{(a_1 - a_2)}{(a_2 - a_3)} = \frac{a_1}{a_3} \rightarrow \frac{(4-6)}{(6-a_3)} = \frac{4}{a_3}$$

$$\rightarrow \frac{-2}{(6-a_3)} = \frac{4}{a_3}$$

Menjadi, -2a_3 = 24 – 4a_3 atau 2a_3 = 24. Jadi a_3 = 12

Dengan mensubstitusikan pada rumus 4-11diperoleh:

$$a_n = \frac{4(6)}{(6-a_3)} = \frac{4}{a_3}$$

$$= \frac{24}{8-2n} = \frac{12}{4-n}$$

Catatan: untuk n = 3 maka a_3 = 12/(4-3) = 12

Contoh 15. Suatuangka x adalah berbanding tengah harmonik antara bilangan 5 dan 10 dan dalam urutan ini membentuk deret harmonik. Berapakah nilai x tersebut:

Cara I: 1/a – 1/x = 1/x – 1/b, dengan mensubstitusikan a dan b maka:

1/5 – 1/x = 1/x – 1/10

1/x + 1/x = 1/5 + 1/10

2/x = 3/10

x = 2(10/3) = 6,6667

Cara II : $x = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2(5)(10)}{5+10} = 100/15$

=100/15 = 6,6667

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Tiga bilangan membentuk sebuah DH (deret hitung). Jumlah ketiga bilangan itu adalah 18 dan hasil kalinya adalah 81. Carilah bilangan tersebut.
2. Dalam sebuah DH diketahui a, 5 dan b = 5. Tentukan a_n dan S_n
3. Sebuah DH terdiri dari 12 buah suku Jumlah tiga suku yang pertama sama dengan 6 dan jumlah tiga suku terakhir 33. Carilah S, dan hitunglah jumlah semas suku
4. Sebuah DH dengan S. 16 dan Se 64. Carilah suku ke-20 dan ke-25.
5. Hitunglah S_n untuk bilangan di bawah 101 yang habis dibagi 4.
6. Antara bilangan 12 dan 48 akan disisipkan 8 bilangan sehingga membentuk DH tersebut. Carilah suko ke-6 dan hitunglah jumlah DH tersebut.
7. Tiga bilangan membentuk deret ukur (DU). Jumlah ketiga bilangan itu adalah 26 dan hasil perbanyakannya 216. Carilah ketiga bilangan itu.
8. Hitunglah sampai 4 angka dibelakang koma DU berikut ini
   a. $1 + 1{,}12 + 1{,}12^2 + 1{,}12^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1.12^{15}$
   b. $1{,}17 + 1{,}17^2 + 1{,}17^3 + 1{,}17^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1{,}17^{20}$
   c. $1{,}05^2 + 1{,}05^3 + 1{,}054 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1.05^{25}$
9. Diketahui DU dengan suku pertama 100 dan suku ketiga sama dengan 25. Hitunglah lima suku pertama dari deret tersebut.
10. Sebuah DU dimana S_1 6 dan S_2 = 30. Hitung suku ke-5 dan suku ke-10.
11. Hitunglah jumlah DU berikut ini:
    a. 1,9, 1/3, 3, 1/9, 1, 1/27, 1/3, 1/81, 1/9,……….
    b. 4, 1/2, 2, 1/4, 1, 1/8, 1/2, 1/16, 1/4,……….
12. Suatu deret harmonik dengan suku kedua a, 8 dan suku ketiga sama dengan 12. Berapakah suku pertama dan suku ke-n.
13. Suatu angka x adalah berbanding tengah harmonik antara bilangan 10 dan 30 dan dalam urutan ini membentuk deret harmonik. Berapakah nilai x tersebut.
14. Angka 4,8 adalah berbanding-tengah-harmonis antara suatu angka a dan 6 dan dalam urutan ini adalah bentuk deret harmonis. Berapakah a!
15. Suatu angka 77/9 adalah berbanding-tengah-harmonis antara angka x dan 11 dan dalam urutan ini adalah bentuk deret harmonik. Berapakah x tersebut.
16. Suatu deret harmonik, diketahui bahwa $a_2 = 8$ dan $a_3 = 12$. Carilah berapa suku a_1 dan a_2.

17. Buktikan bahwa untuk suatu bentuk 3 buah suku berikutnya dapat dinyatakan sebagai bentuk deret harmonik dari suku-suku berikut ini: 1/(a-b), 1/a, 1/(a+b).
18. Untuk suatu bentuk 4 buah suku berikutnya dapat dinyatakan sebagai deret harmonik dari suku-suku berikut ini: 1/(a-3b), 1/(a-b), 1/(a+b) dan 1/(a+3b). Buktikan!

BAB IV
MATEMATIKA KEUANGAN

Beberapa aplikasi dari teori eksponensial dan logaritma serta teori deret (baca: deret ukur), banyak dimanfaatkan dalam kasus pinjam meminjam maupun pembahasan kasus investasi atau yang lebih umum kita kenal dengan istilah teori nilai uang. Sehubungan dengan hal itu, pada bab ini akan kita bahas manfaat maupun penerapan teori tersebut pada masalah finansial, yaitu perhitungan besarnya pinjaman yang harus dibayar pada jangka waktu tertentu berdasarkan tingkat suku bunganya. Kenyataan ini diberangkatkan dari suatu asumsi bahwa uang yang kita terima pada waktu yang akan datang tidak sepadan banyaknya dengan jumlah uang yang setara pada saat sekarang.

4.1 PERHITUNGAN NILAI UANG DENGAN PEMBAYARAN TUNGGAL

4.1.1 Bunga Biasa

Teknis perhitungan bunga biasa (*simple interest*) adalah dengan menganggap bahwa modal awal P (*present amount*) selalu tetap meskipun bunga yang terjadi selalu bertambah. Dalam kasus ini bunga dianggap seolah-olah telah dibayar pada akhir periode bunga. Periode bunga adalah persentase bunga dari modal awal. Jika kita meminjam uang sebesar P rupiah dengan tingkat bunga yang berlaku pada saat itu sebesar i % per tahun, maka sesudah satu tahun jumlah yang harus dikembalikan F (*future amount*) tahun ke-1 adalah $F_i = P + Pi$.

Pada a = 2, $F_i = P + Pi + Pi = P\ (1 + 20)$

Pada n = 3, $F_1 = P + Pi + Pi + Pi = P\ (1 + 3)$

Pada akhir tahun ke-n:

$$F_1 = P(1 + ni) \qquad 5\text{-}1$$

Contoh 1. Hitunglah pinjaman yang harus dikembalikan dari sebuah modal sebesar 10 juta rupiah dengan tingkat suku bunga 12% per tahun dan dijalankan dalam masa 4 tahun.

$$F_4 = 10.000.000\ [1 + (4)\ 0{,}12]$$

$$= 10.000.000 \times 1{,}48 = 14.800.000$$

Jadi besarnya pinjaman yang harus dikembalikan pada akhir tahun ke 4 adalah sebesar Rp. 14.800.000,-

4.1.2 Bunga Majemuk

Perhitungan dengan pola bunga majemuk (*compound interest*) mengasumsikan bahwa bunga dari tahun sebelumnya akan diperhitungkan sebagai modal awal untuk tahun berikutnya. Jika besar pinjaman awal sebesar P dengan tingkat bunga sebesar i% per tahun dan lama pinjaman adalah n tahun, maka besarnya pengembalian yang harus dibayarkan:

Pada n = 1. $F_1 = P + Pi = P\ (1 + i)$

Pada n = 2, $F_2 = F_1 + Fi = F\ (1 + i)$

$= P(1 + i)\ (1 + i)$

$= P(1 + i)$

Pada n = 3, $F_3 = F_2 i = F_2(1+i)$

$= P(1 + i)^2\ (1 + i)$

$= P(1 + 1)^3$

Besarnya pengembalian pada akhir tahun ke-n adalah:

$$F_n = P\ (1 + i)^n \qquad 5\text{-}2$$

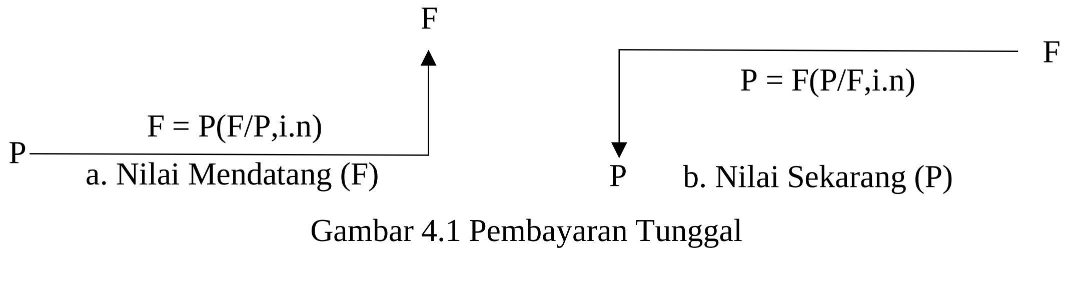
Dapat juga ditulis secara singkat: F = P(F/P.i.n)

Nilai $(1 + i)^n$ disebut faktor kompon (*compounding factor*). Seringkali yang dihitung bukan besarnya F, melainkan mencari harga P yaitu nilai sekarang. Selanjutnya untuk menghitung nilai sekarang dari sejumlah uang tertentu itu, rumus 5-2 dapat dihitung balik menjadi:

$$P = \frac{F}{(1 + i)^n} \qquad 5 - 3$$

Ditulis secara singkat: P = F(P/Fin)

Nilai 1/(1+i) disebut diskon faktor (*discount factor*). Proses penentuan nilai sekarang dari sejumlah uang yang akan datang disebut pendiskontoan.



Gambar 4.1 Pembayaran Tunggal

Contoh 2. Seseorang meminjamkan uang dengan bunga sebesar 18% per tahun selama 5 tahun. Berapa uang yang diterima pada akhir tahun ke-5 jika pinjaman awal sebesar Rp 2.000.000.

Uang pada akhir tahun ke-5 adalah: $F = 2.000.000\ (1 + 0{,}18)^5$

Cara I. Dengan menggunakan logaritma:

Log F = log 2.000.000 +5 log 1,18

= 6,301 + 5(0,072) = 6,6605

F = antilog 6,6605 = 4.576.147

Cara II. Lampiran-IV (F/P,18%,5) = 2,2878

F = 2.000.000 x 2,2878

= 4.575.600

Jadi, jumlah uang pada akhir tahun ke-5 adalah Rp 4.575.600,-

Contoh 3. Dalam berapa tahunkah harus dibunga-majemukkan modal P menjadi 3 kali lipat dengan suku bunga sebesar 17% per tahun.

Jika sang menjadi tiga kali lipat F = 3P, maka:

3P = P (1 + 0,17) → 3 = (1 + 0,17)

log 3 = n log (1,17) diubah dalam bentuk n menjadi:

$$n = \frac{\log 3}{\log (1{,}17)} = \frac{0{,}4771}{0{,}0682} = -6{,}9976 \text{ (pendekatan, } n = \ 7 \text{ tahun)}$$

Contoh 4. Seseorang akan mendapatkan uang warisan sebesar 50 juta rupiah yang baru dapat diperoleh 4 tahun lagi dari sekarang. Mengingat kebutuhan mendesak, dia pergi mengambil uang yang berada di bank dan dapat menerima jumlah tertentu. Berapakah yang dapat dia terima jika tingkat suku bunga mencapai 17% per tahun.

$$P = \frac{F}{(1 + 0{,}17)^n} = \frac{50.000.000}{(1{,}17)^4} \quad \text{dengan } n = 4, \text{sehingga :}$$

Log P = log 50.000.000 – 4 log 1,17

= 7,69897 – 4 (0,0682) = 7,4262

P = antilog 7,4262 = 26.682.502

Jadi, uang yang diterima pada saat ini sebesar Rp 26.682.000,-

Contoh 5. Hitunglah harga akhir sebuah modal sebesar 10 juta rupiah yang dibungamajemukkan selama 5 tahun 3 bulan dengan tingkat suku bunga sebesar 15% setahun.

Harga akhir modal Padalah: $F_n = P(1 + 0{,}15)^n \rightarrow n = 5$ tahun + 3 bulan

= 5¼ tahun

$F = 10.000.000\ (1 + 0{,}15) = 10.000.000(1{,}15)^{5/4}$

$\log F = \log 10.000.000 + 5\ ¼ \log 1{,}15$

= 7 + 5% ¼ (0,0607) = 7,3187

F = antilog (7,3187) = 20.828.771

Jadi, harga akhir modal tersebut adalah Rp 20.828.771,-

Contoh 6. Jumlah permintaan buku tulis merk Doraemon akan berlipat dua kali untuk setiap 3 tahun. Jika jumlah permintaan sekarang sebesar 4.000 buah, hitunglah berapa jumlah permintaan sekarang sebesar 4.000 buah, hitunglah berapa jumlah permintaan untuk a) 4 tahun mendatang, b). 12 tahun mendatang. c). 2 tahun yang lalu dan d). 6 tahun yang lalu.

Diketahui P = 4.000 dan S, -4.000(2) setiap 3 tahun satuan waktu

a. Untuk 4 tahun mendatang+x= 4/3 = 1,333

$S_4 = 4.000(2)^{1.333}$

$\log S_4 = \log 4.000 + 1{,}333 \log 2$

= 3,6021 + 1,333 (0,3010) = 4,0033

S_4 = antilog 4.0033 = 10.077 buah

b. Untuk 12 tahun mendatang $\rightarrow$ > x = 12/3 = 4

$\$_{-2} = 4.000(2)^4 = 4.000 \times 16$

= 64.000 buah

c. Untuk 2 tahun yang lalu $\rightarrow$ x = 2/3 = -0,667

$S_{-2} = 4.000(2)^{-0,67}$

$\log S_{-2} = \log 4.000 - 0{,}667 \log 2$

= 3,6021 – 0,667(0,3010) = 3,4013

S_{-2} = antilog 3,4013 = 2.520 buah

d. Untuk 6 tahun yang lalu → x = -6/3 = -2

$S_4 = 4.000(2)^{-2} = 4.000 \times 0,25$

$= 1.000$ buah

Contoh 7. Si A meminjam uang sebesar 2 juta rupiah kepada kenalannya. Jika pada akhir tahun ke-5 ia mengembalikannya sebesar = Rp. 4.575.600,-. Hitunglah tingkat suku bunga per tahunnya.

Tingkat bunga yang berlaku dapat dicari dari hubungan berikut:

$(F/P) = (1 + 1)^n \rightarrow \log F - \log P = n \log(1 + i)$

$$\log (1 + i) = \frac{\log F - \log P}{n}$$

untuk P = 2.000.000 F = 4.575.600 dan n = 5 tahun, maka

$$\log (1 + i) = \frac{\log(4.575.600) - \log(2.000.000)}{5} = \frac{6,6604 - 6,3010}{5}$$

$= 0,07188 \rightarrow (1 + i) = \text{antilog } (0,07188) = 1.18$

$i = 1,18 - 1 = 0,18$

Jadi, tingkat suku bunganya adalah i = 18 % per tahun.

4.1.3 Bunga Kontinu

Periode bunga pada bunga majemuk dapat juga bernilai lebih kecil dari periode suku bunga. Maksudnya jika suku bunga sebesar per tahun dan selama setahun terdapat periode bunga sebanyak maka pada akhir tahun ke-n jumlah uang yang harus dikembalikan adalah:

$$F_n = P\left[1 + \frac{i}{m}\right]^{nm} \qquad 5-4$$

Bila periode bunga menjadi besar tak terhingga, maka perbandingan i/m akan mendekati nol. Sehingga persamaan 5 – 4 menjadi:

$$F_n = P \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{(m/i)ni} = Pe^{ni} \qquad 5-5$$

Jika pemajemukan secara kontinu ini diambil dengan tingkat suku bunga (i = 100%) selama periode satu tahun (n=1), maka penyelesaian persamaan 5-4 dan 5-5 dapat diturunkan menjadi.

$$F_n = P \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} = Pe \qquad 5-6$$

Jika pemajemukan secara kontinu ini diambil dengan tingkat suku bunga r selain 100 persen dan periode waktu (n + 1) tahun, maka penyelesaian pada rumus 5-5 adalah:

$$F_n = Pe^{nr} \qquad 5 – 6$$

Contoh 8. Akan dihitung suatu modal awal sebesar Rp5.000.000,- dengan bunga 18% per tahun yang dimajemukkan selama 2 tahun.

a. Secara tahunan, $F = P(1 + i)^a$

$= 5.000.000\ (1 + 0.18)^2$

Penarikan logaritma Log F = log 5.000.000 + 2 log 1.18

$= 6,699 + 2(0,072) = 6,843$

Jadi, F = antilog 6,843 = Rp6 962.000,-

b. Seperempat tahunan (m=4), $F = P(1 + i/m)^{mn}$

$= 5.000.000\ (1 + 0,18/4)^{4(2)}$

$= 5.000.000\ (1 + 0,045)^{4(2)}$

Penarikan logaritma: Log F = log 5.000.000 + 8 log 1,045

$= 6,699 + 8(0,0191) = 6,8519$

Jadi, F = antilog 6.852 = Rp 7.110.995,-

c. Secara kontinu, $F = Pe^{nr} = 5.000.000\ e^{2(0,18)}$

$= 5.000.000\ e^{0,36}$

Pada Lampiran-III diperoleh $e^{0,36} = 1,4333$

Jadi, F = 5.000.000(14333) Rp. 7.166.500,-

4.1.4 Suku Bunga Efektif

Suatu pokok pinjaman P tertents yang dibungakan secara majemuk dengan suku bunga nominal (*nominal rate of interest*) ternyata memberikan hasil akhir F yang berbeda tergantung pada model pemajemukannya.

Jika i merupakan simbol dan suku bunga nominal dan suku bunga tahunan efektif dinotasikan sebagai i, maka hubungan diantara keduanya dijabarkan dalam uraian berikut ini:

$$P(1 + i_e)^n = P\left[1 + \frac{i}{m}\right]^{nm} \qquad 5 - 8$$

Pada pemajemukan berganda (*multiple compounding*), suku bunga efektif tahunan dapat ditentukan dengan membagi ruas kanan dan ruas kiri (rumus 5-8) dengan P dan menarik akar pangkat n sehingga:

$$(1 + i_e)^n = \left[1 + \frac{i}{m}\right]^m$$

$$i_e = P\left[1 + \frac{i}{m}\right]^m - 1 \qquad 5 - 8$$

Pada pemajemukan kontinu maka bentuk suku bunga efektif tahunannya dapat ditentukan dengan membagi masing-masing ruas dengan P serta mengambil akar pangat n yaitu :

$P(1 + i_e)^n = Pe^{nr}$

Menjadi, $(1 + i_e) = e^r$

$i_e = e^r - 1$ 5 – 10

Contoh 9. Tentukan suku bunga efektif tahunan (i_e) jika diketahui tingkat suku bunga nominalnya sebesar 18% per tahun.

a. Secara seperempat tahunan (m = 4).

$$i_e = \left[1 + \frac{i}{m}\right]^m - 1 = \left[1 + \frac{0{,}18}{4}\right]^{-4} - 1$$

$= [1 + 0{,}045]^4 - 1$

Penarikan logaritma misalkan: $x = (1{,}045)^4$

$\log x = 4 \log 1{,}045 = 4\ (3{,}0191) = 12{,}0765$

$x = \text{antilog}\ 1{,}0765 = 1{,}1925$

jadi, $i_e = 1{,}1925 - 1 = 0{,}1925 \rightarrow i_e = 19{,}25\%$

b. Secara kontinu, $i_e = e^r - 1$

$= e^{0,18} - 1$

Pada Lampiran III diperoleh $e^{0,18} = 1{,}1972$

Jadi, $i_e = 1{,}1972 - 1 = 0{,}1972 \rightarrow i_e = 19{,}72\%$

4.1.5 PERTUMBUHAN DISKRIT DAN PERTUMBUHAN KONTINU

Pada pasal 3.2 disebutkan bahwa fungsi eksponensial biasanya menggambarkan tingkat pertumbuhan periodik yang ditunjukkan dalam persamaan rumus 5-4 dan fungsi eksponensial natural menggambarkan tingkat pertumbuhan kontinu yang konstan seperti pada rumus 5-7. Pengkonversian fungsi eksponensial (diskrit) menjadi fungsi eksponensial natural (kontinu) dapat dilakukan dengan membandingkan kedua persamaan tersebut dan kemudian menyelesaikan dalam bentuk r yaitu:

$$Pe^{nr} = P\,[1 + \frac{1}{m}]^{mn}$$

Jika masing-masing ruas dibagi dengan P dan mengambil logaritma natural keduanya akan diperoleh

$$nr = mn\ \mathrm{In}\,[1 + \frac{1}{m}]$$

Selanjutnya membagi kedua ruas dengan a, diperoleh penyelesaian dalam bentuk r yaitu,

$$r = m\ \mathrm{In}\,[1 + \frac{1}{m}] \qquad 5 - 11$$

Contoh 10. Jika pokok pinjaman sebesar 1 juta rupiah yang dimajemukkan setengah tahunan dengan suku bunga 12% per tahun selama 10 tahun dengan fungsi eksponensial dan fungsi eksponensial natural.

a. Fungsi eksponensial setengah tahunan (m = 2)

$$F = P\,[1 + \frac{1}{m}]^{mn} = 1.000.000\,[1 + \frac{0{,}12}{2}]^{2(10)}$$

$= 1.000.000\ (1 + 0{,}06)^{20}$

log F = log 1.000.000+20 log 1.06

= 6 + 20(0.0253) = 6,506177

Diperoleh, F = antilog 6.506117 = Rp. 3.207.135,-

b. Fungsi eksponensial natural setengah tabunan (m = 2)

r = m ln(1 + i/m) = 2 In [1 + (0.12/2)] = 2(0,05827)

= 0,1165 $\rightarrow$ r = 11,65%

F = Penr = 1.000.000 e10-0.1165

= 1.000.000 el,165 = 1.000.000(3206)

Diperoleh, F= Rp 3.207.135.-

Jadi pada tingkat pertumbuhan kontinu dari pokok pinjaman Rp. 1.000.000,- pada bunga 12 persen setahun yang dimajemukkan setengah tahunan adalah sebesar 11.65 persen setahun. Artinya untuk tingkat bunga pada 11,65 persen pada pemajemukkan kontinu setara dengan 12 persen pada pemajemukan berganda.

Contoh 11. Seperti pada contoh soal diatas, apabila pokok pinjaman akan dimajemukkan untuk satu tahunan (m= 1).

a. Fungsi eksponensial satu tahunan (m = 1)

$$F = P\left[1 + \frac{i}{m}\right]^{m} = 1.000.000[1 + 0.121]^{10}$$

$= 1.000.000(1+0,12)^{10}$

log F = log 1.000.000 + 20 log 1,12

= 6 + 20(0,0492) = 6,9843

Diperoleh, F = antilog 6,9843= Rp 3.105.848,-

b. Fungsi eksponensial natural satu tahunan (m = 1)

r = m ln(1 + i/m) = In (1 + 0,12) = 0,1133 → r = 11,33%

F $= Pe^{nr} = 1.000.000\ e^{100,1139}$

$= 1.000.000\ e^{1,133} = 1.000.000(3,1049)$

Jadi, F = Rp 3.105.848,-

Contoh 12. Sebuah perusahaan dengan volume penjualan untuk tahun ke-1 sebanya 5 juta unit dan tahun ke-5 adalah 10 juta unit. Jika tingkat pertumbuhan penjualan tahunan mengikuti pola eksponensial, hitunglah:

a. Tingkat pertumbuhan kontinu tahunan (r)
b. Tingkat pertumbuhan diskrit tahunan (i)
c. Fungsi penjualan kontinu tahunan (F)

Rangkaian data-data volume penjualan.

Pada tahun ke-1 (n=1) → $Pe^{(1)r}$ = 5.000.000 unit ....1)

Pada tahun ke-5 (n = 5) $\rightarrow$ $Pe^{(5)r}$ = 10.000.000 unit ....2)

Dengan mengambil logaritma natural untuk persamaan 1) dan persamaan 2):

a. In P + r = In 5.000.000 $\rightarrow$ In P + r = 15.42495

In P + 5r = In 10.000.000 $\rightarrow$ In P + 5r = 16.11809

———————————— +

-4r = -0,69315

diperoleh r = -0,69315 (-4) = 0,1733

Jadi, laju pertumbuhan kontinu pertahun r = 17.33%.

b. Laju pertumbuhan diktif tahunan dapat dicari dari hubungan berikut:

$r = m \ln \left[1 + \frac{i}{m}\right]$ pada pemajemukan suatu tahunan diperoleh :

0,1733 = ln atau $e^{0,1733}$ = (1 + i)

1,1892 = 1 + i $\rightarrow$ i = 0,1892

Laju pertumbuhan diskrit i = 1892%

c. Fungsi penjualan kontinu tahunan:

ln P + r = 15,42495 $\rightarrow$ ln P = 15,42495 – r

= 15,42495 – 0,1733

P = antiln 15.251 = 4.204.426

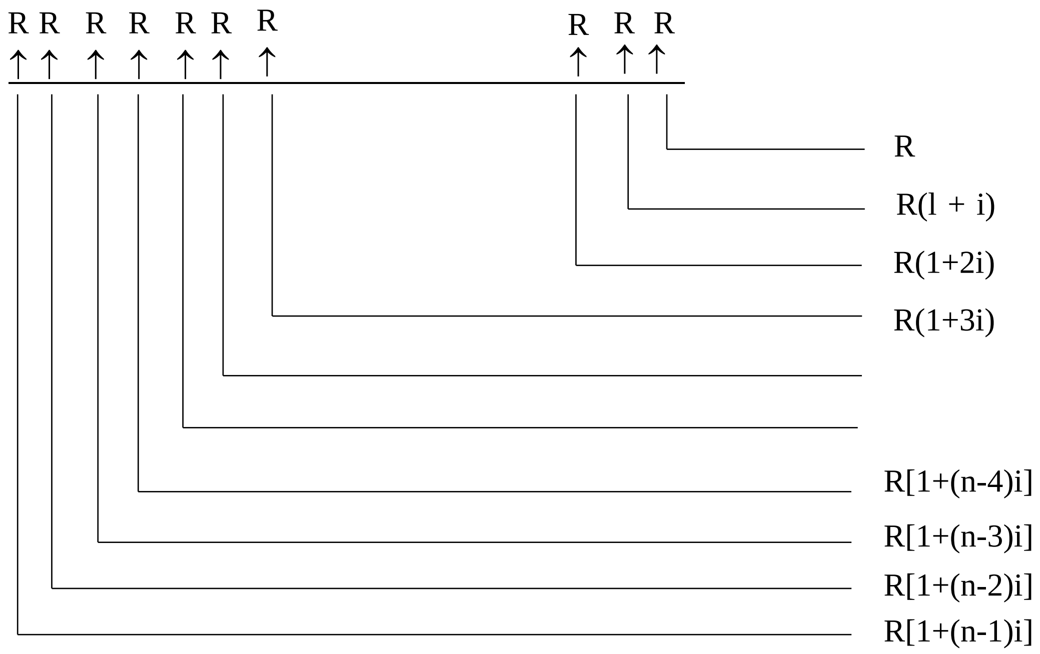
Jadi, fungsi penjualan kontinu tahunan F = 4.204.426e ^{0,1733ln}

4.2 PERHITUNGAN NILAI UANG DENGAN PEMBAYARAN SERI

Pada pasal 5.1. telah dibahas mengenai perhitungan nilai mendatang F dari sejumlah modal awal (nilai sekarang) P dengan metode pembayaran tunggal (*simple payment*) atau sebaliknya. Dalam pembahasan berikut ini akan dibicarakan pembayaran seri sebanyak R baik untuk perhitungan nilai uang sekarang P, maupun mendatang F selama jangka waktu n tahun. Adapun perhitungan-perhitungan dengan pembayaran seri R sama dengan metode yang dipakai pada perhitungan perhitungan pembayaran tunggal.

4.2.1 Pembayaran Seri: Bunga Biasa

Situasi yang digambarkan dalam perhitungan bunga biasa dengan pembayaran seri R. yaitu dengan perhitungan bunga dihitung atas dasar modal awal. Sebagai ilustrasi dapat dilihat pada Gambar 5.2 berikut ini:



Gambar 4.2 Perhitungan P_r dan F_{nr} dengan Bunga Biasa.

Nilai pembayaran tahun ke-1 pada tahun ke-n-R[1+(n-1)i]

Nilai pembayaran tahun ke-2 pada tahun ke-n R[1+(n-2)i]

Nilai pembayaran tahun ke-3 pada tahun ke-n R[1+(n-3)i]

…………………………………………………………….

…………………………………………………………….

Nilai pembayaran tahun ke-(n-3) pada tahun ke-n = R(1+3i)

Nilai pembayaran tahun ke-(n-2) pada tahun ke-n = R(1+2i)

Nilai pembayaran tahun ke-(n-1) pada tahun ke-n = R(1+i)

Nilai pembayaran tahun ke-n pada tahun ke-n = R

―――――――――――――――――――――――――――――― +

F = R + R (1 + i) + R(1 + 2)+ ……. + R [1 + (n - 2)] + R[1+(n -)i]

Dengan memanipulasi beberapa faktor, maka untuk mencari nilai mendatang F, dapat dijelaskan dalam rumus berikut:

F = R {n + 1/2 n . (n + 1)i}

Dengan mengeluarkan n pada ruas kiri diperoleh,

F = nR {1 + (n + 1)i} 5 – 12

Setara dengan F maka nilai sekarang P, pada pembayaran tunggal seperti rumus 5-1 adalah F = P(1+ni), sehingga:

$$P = \frac{nR}{(1 + ni)}\{1 + \frac{1}{2}i(n + 1)\} \qquad 5 - 13$$

Contoh 13. Seseorang meminjam uang tiap-tiap permulaan tahun sebesar Rp1.000.000,- dengan bunga sebesar 15% per tahun. Berapa jumlah uang yang harus dikembalikan pada akhir tahun ke-10.

Diketahui R = 1.000.000, i = 15% dan n = 10, maka:

F_{10r} = nR {1 + ½i(n + 1)}

= (10) 1.000.000 {1 + (0,15)(10 + 1)}

= 10.000.000 (1 + 0,825)

= Rp. 18.250.000,-

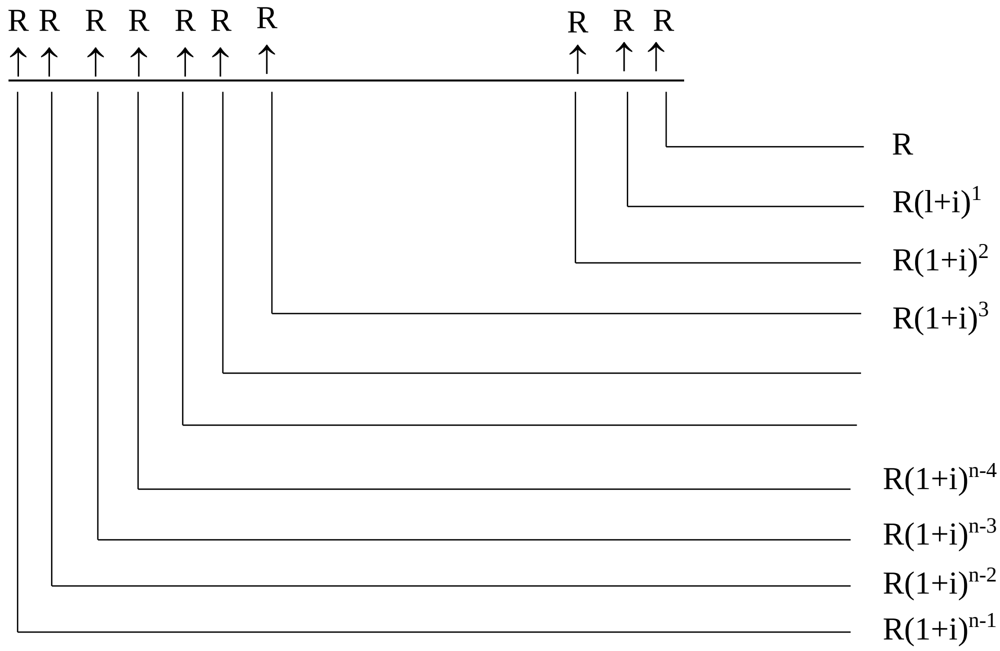
Untuk mencari nilai uang sekarang P, dapat dihitung yaitu,

$$P = \frac{F_{10r}}{(1 + 10i)} = \frac{18.250.000}{\{1 + 10(0{,}15)\}}$$

4.2.2 Pembayaran Seri: Bunga Majemuk

Pada pembayaran seri R berturut-turut dengan bunga majemuk akan diperkenalkan dengan apa yang disebut anuitet (*annuity*) yaitu sejumlah uang yang tetap yang dibayarkan atau diterima tiap-tiap tahun yang terdiri dari angsuran dan bunganya. Anuitet ini mempunyai beberapa sifat yaitu jumlah pembayaran R yang sama, panjang periode antara angsuran sama dan pembayaran pertama ilakukan pada akhir periode pertama.

Untuk memudahkan penjelasan di atas, maka perhitungan nilai sekarang maupun nilai mendatang dari pembayaran seri R dapat diikuti pada Gambar 5.3 berikut ini:



Gambar 4.3 Perhitungan P_r dan F_{nr} dengan Bunga Majemuk.

Nila pembayaran tahun ke-1 pada tahun ke-n = $R(1+i)^{n-1}$

Nilai pembayaran tahun ke-2 pada tahun ke-n = $R(1+i)^{n-2}$

Nilai pembayaran tahun ke-3 pada tahun ke-n = $R(1+i)^{n-3}$

…………………………………………………………………

…………………………………………………………………

Nilai pembayaran tahun ke-(n-3) pada tahun ke-n = $R(1+i)^3$

Nilai pembayaran tahun ke-(n-2) pada tahun ke-n = $R(1+i)^2$

Nilai pembayaran tahun ke-(n-1) pada tahun ke-n = $R(1+i)^1$

Nilai pembayaran tahun ke-n pada tahun ke-n =R

+

F_{nr} = $R + R(1+i)^1 + R(1+i)^2 + R(1+i)^2 + ... +$
$R(1+i)^{n-3} + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}$

= $R\,[1 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + (1+i)^3 + ... +$
$(1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]$

Misal p = 1 + i, maka:

$F_2 = R\,[1 + p^1 + p^2 + p^3 + ... + p^{n-3} + p^{n-2} + p^{n-1}]$

tidak lain adalah deret ukur yaitu:

$$F_{nr} = R\frac{p^n - 1}{p - 1}$$

dengan mensubstitusikan harga p semula, akhirnya diperoleh

$$F_{nr} = R\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \qquad 5 - 14$$

Secara ringkas ditulis sebagai F = R(F/R,i,n). Bentuk (F/R,I,n) disebut faktor kompon tahunan (*compound factor annuity*).

Untuk setiap aliran pemasukan dan aliran pengeluaran dapat dicari nilai ekivalensi tahunan atau anuitetnya. Dari rumus 5-14 diperoleh nilai anuitet tahunan R untuk pembayaran seri yaitu:

$$R = F_{nr}\frac{i}{(1 + i)^n - 1} \qquad 5 - 15$$

Ditulis sebagai R- FR/Fini. Bentuk (R/Fin) disebut faktor penyimpanan (*sinking fund factors*).

Setara dengan nilai sekarang P. perhitungan ini dapat juga didekati dengan cara pengembalian pembayaran seri R (nilai ekivain anuitet) sebagai berikut:

$$R = Pr\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \qquad 5 - 16$$

Ditulis sebagai R = PR/Pin). Bentuk (R/P..n) disebut faktor pengembalian modal (*capital recovery factor*).

Contoh 14. Seseorang menabung tiap-tiap permulaan tahun sebesar Rp 3 juta di Bank Soehartin yang memberikan banga 15% per tahun. Berapakah uangnya sesudah 10 tahun.

Diketahui R = 3 juta, i= 15% dan n = 10 tahun

$$F_{10r} = R\frac{(1 + i)^n - 1}{i} = 3.000.000\ \frac{(1 + 0{,}15)^{10} - 1}{0{,}15}$$

= 3.000.000 (F/R, 15%, 10)

Pada Lampiran – VI (F/R,15%, 10) = 20,304. Jadi,

F_{10r} = 3.000.000 (20,304)

= 60.911.155

Jadi, besarnya tabungan sesudah 10 tahun sebesar Rp 60.911.155,-

Contoh 15. Seseorang mendapat pinjaman dari bank untuk perluasan usahanya sebesar 35 juta rupiah. Jika lama pinjaman dilunasi dalam tempo 8 tahun dengan tingkat bunga sebesar 15% per tahun, hitunglah besarnya cicilan atau angsuran per tahunnya (anuitet).

Diketahui P = Rp 35 juta, i = 15% dan n = 8 tahun

I. Dengan menggunakan Tabel:

$$R = P_r \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 35.000.000 \frac{0{,}15(1+0{,}15)^8}{(1+0{,}15)^8 - 1}$$

= 3.000.000 (F/R, 15%, 8)

Pada Lampiran VIII (R/P, 15%,8) = 0,2228 maka:

R = 35.000.000 (0,2228)

= 7.798.000

Jadi, besar cicilan per tahun adalah Rp 7.798.000,-

II. Dengan Lgaritma:

Cara deangan logaritma dibayar akhir, tiap-tiap tahun adalah R rupiah

Harga tetap dari R rupiah pertama = $\frac{R}{1{,}15}$

R rupiah kedua = $\frac{R}{1{,}15^2}$

R rupiah ketiga = $\frac{R}{1{,}15^3}$

……………………………………….dst.

R rupiah kedelapan = $\frac{R}{1{,}15^8}$

———————————————————— +

$$\frac{R}{1{,}15} + \frac{R}{1{,}15^2} + \frac{R}{1{,}15^3} \dots \dots + \frac{R}{1{,}15^8} = 35.000.000$$

$$\frac{R}{1{,}15^8}[1 + 1{,}15 + 1{,}15^2 + \cdots + 1{,}15^7] = 35.000.000$$

Bentuk deret ukur :

$$\left[\frac{R}{1{,}15^8}\right] \frac{1{,}15^8 - 1}{1{,}15 - 1} = 35.000.000 \text{ dengan } a = \frac{R}{1{,}15^8} \text{dan } p = 1{,}15$$

$$\left[\frac{R}{1{,}15^8}\right] \frac{1{,}15^8 - 1}{0{,}15} = 35.000.000$$

$$\left[\frac{R}{1{,}15^8}\right][1{,}15^8 - 1] = 5.250.000$$

$$R = 5.250.000 \frac{1{,}15^8}{(1{,}15^8 - 1)}$$

Misalkan x = $1{,}15^8 \rightarrow$ log x = 8 log 1,15

= 8 (0,0607) = 0,4856

x = antilog 0,4856 = 3,059

Maka, $R = 5.250.000 \dfrac{3{,}059}{2{,}059} = 5.250.000(1{,}4856) = 7.799.975$

Jadi, cicilan per tahun sebesar Rp 7.799.975,- (adanya berbedaan harga R semata-mata karena pembulatan-pembulatan).

Contoh 16. Seseorang mendapat pinjaman dari bank untuk perluasan usahanya sebesar 35 juta rupiah. Jika besarnya anuitet (cicilan per tahun) sebesar Rp7.798.000, dalam berapa tahun pinjaman akan habis diangsur.

Diketahui P = Rp 35.000.000,- i = 15% dan R = Rp 7.798.000,-

I. Dengan Daftar Anuitet:

Anuitet Rp 7.798.000 untuk pinjaman Rp 35.000.000,-

Untuk pinjaman Rp 1,- anuitetnya adalah $\dfrac{\text{Rp } 7.798.000}{Rp\,35.000.000}$ = 0,2228

Untuk anuitet 0,2228 dengan segera dapat dilihat pada Lampiran-VIII yaitu kolom 15% kemudian ditarik garis ke bawah pada angka 0,2228 dan diurut ke samping kiri diperoleh angka 8 (tahun).

II. Penarikan Logaritma:

Anuitet	= Rp 7.798.000,-
Bunga 15% x Rp 35.000.000,-	= Rp 5.250.000,-
	+
Angsuran Pertama (A)	= Rp 2.548.000,-

$$n = \frac{\log R - \log A}{\log(1+i)} = \frac{\log 7.798.000 - \log 2.548.000}{\log(1+0{,}15)}$$

$$= \frac{6{,}8919 - 6{,}4062}{0{,}0607} = \frac{0{,}4857}{0{,}0607}$$

= 8,001 dibulatkan menjadi n = 8 tahun

Contoh 17. Adanya krisis moneter sejak bulan Agustus 1997, akhirnya pemerintah Indonesia Orde Reformasi mendapat pinjaman segar dari IMF sebesar 43 milyar dollar AS. Persyaratan pinjaman adalah jangka waktu pinjaman 25 tahun, tingkat suku bunga sebesar 12% per tahun. Pada 5 tahun pertama pemerintah Indonesia diberi keringanan yaitu tanpa melaksanakan pembayaran utang. Hitunglah angsuran per tahun yang harus dibayar pemerintah Indonesia sejak tahun ke-6 sampai akhir tahun ke-25?

Diketahui pinjaman awal P = \$ 43 milyar, i 12% dan n = 5 tahun.

Dihitung dahulu besar nilai mendatang sampai akhir tahun ke-5:

F_1 = $P(1 + i)^5$

= \$ 43 milyar $(1 + 0{,}12)^5$

= \$ 43 milyar (F/P,12%,5)

= \$ 43 milyar x (1,7623)

= \$75,779 milyar

Pada akhir tahun ke-5 (awal tahun ke-6) nilai pinjaman pemerinta Indonesia menjadi sebesar \$ 75,779 milyar. Angka ini kemudian dikonversi menjadi F, = P, = \$ 75,779 milyar, i = 12% dan n = 20 tahun. Untuk menghitung besarnya cicilan per tahun:

$$R = P_r = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \$75{,}779 miyar\,\frac{0{,}12(1+0{,}12)^{20}}{(1+0)^{20} - 1}$$

= \$75,779 milyar (R/P,12%,20)

= \$ 75,779 milyar x (0,1338)

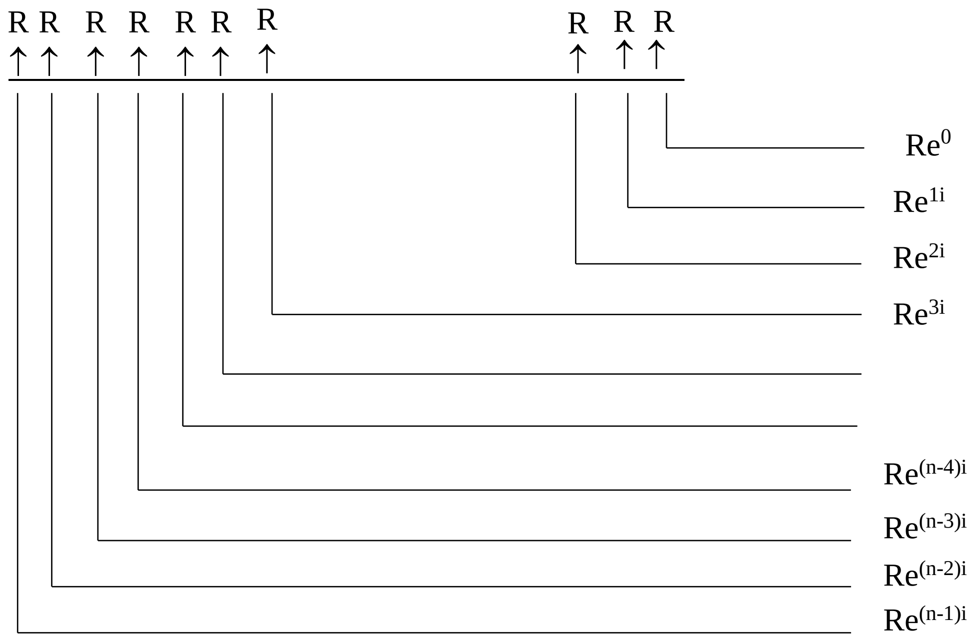
= \$ 10,139 milyar

Jadi, besar angsuran selama 20 tahun terakhir \$ 10,139 milyar/tahun.

4.2.3 Pembayaran Seri: Bunga Kontinu

Pada pembayaran seri R berturut-turut dengan bunga kontinu sangat jarang diminati dalam praktek sehari-hari. Namun untuk memperkaya cakrawala perhitungan seri dengan bunga kontinu ini akan kita bahas seperlunya saja dan selebihnya akan diserahkan kepada para pembaca.

Untuk memudahkan penjelasan di atas, maka perhitungan nilai sekarang maupun nilai mendatang dari pembayaran seri R dapat diikuti pada Gambar 5.4 berikut ini.



Gambar 4.4 Perhitungan P_r dan F_{rn} dengan Bunga Kontinu.

Nilai pembayaran tahun ke-1 pada tahun ke-n = $Re^{(n-1)i}$

Nilai pembayaran tahun ke-2 pada tahun ke-n = $Re^{(n-1)i}$

Nilai pembayaran tahun ke-3 pada tahun ke-n = $Re^{(n-1)i}$

…………………………….. ……….

…………………………….. ……….

Nilai pembayaran tahun ke-(n-3) pada tahun ke-n = Re^{3i}

Nilai pembayaran tahun ke-(n-2) pada tahun ke-n = Re^{2i}

Nilai pembayaran tahun ke-(n-1) pada tahun ke-n = $Re^{1}i$

Nilai pembayaran tahun k-n pada tahun ke-n = R

————————————————————————+

$F_{nr} = Re^{(n-1)i} + Re^{(n-2)i} + Re^{(n-3)i} + \ldots\ldots\ldots\ldots + Re^{3i} + Re^{2i} + Re^{i} + R$

$= [1 + e^{1} + e^{2i} + e^{3i} + \ldots\ldots\ldots\ldots + e^{(n-3)i} + e^{(n-2)i} + e^{(n-1)i}]$

Bentuk ini sama dengan penyelesaian untuk bunga majemuk yaitu berupa deret ukur. Misal P = e^{i}, maka diperoleh:

$$F_{nr} = \frac{e^{ni} - 1}{e^{1} - 1} \qquad 5-17$$

Kesetaraan dengan nilai sekarang seperti pada rumus 5-7 $F_{nr} = P_r . e^{ni}$, diperoleh:

$$P_r e^{ni} = \frac{e^{ni} - 1}{e^1 - 1}$$

Masing-masing ruas dibagi dengan e^{ei} sehingga:

$$P_r = R \frac{[1 - \frac{1}{e^{ni}}]}{e^1 - 1} \qquad 5 - 18$$

Atau dalam bentuk R.

$$R = P_r \frac{e^1 - 1}{[1 - \frac{1}{e^{ni}}]} \qquad 5 - 18$$

Contoh 18. Seserang menabung tiap-tiap permulaan tahun sebesar Rp 3 juta di bank yang memberikan bunga 15% per tahun. Berapakah uangnya sesudah 10 tahun (dihitung dengan bunga kontinu).

Diketahui R = 3 juta, i = 15% dan n = 10 tahun.

$$F_{nr} = R \frac{e^{ni} - 1}{e^1 - 1} = 3.000.000 \left[\frac{e^{10x0,15} - 1}{e^{0,15} - 1}\right]$$

$$= 3.000.000 \left[\frac{e^{1,5} - 1}{e^{0,15} - 1}\right]$$

Pada Lampiran-III diperoleh $e^{0,15}$ = 1,1618 dan $e^{1,5}$ = 4,4817. Dengan mensubstitutsikan pada persamaan diatas maka,

$$F_{10r} = 3.000.000 \left[\frac{4,4817 - 1}{1,1618 - 1}\right] = 3.000.000(21,519)$$

$$= 64.555.623$$

Jadi, nilai tabungan setelah 10 tahun mendatang sebesar Rp64.555.623.

4.3 ANALISIS INVESTASI

Suatu analisis finansial mengasumsikan bahwa suatu investasi akan dilaksanakan dengan harapan bahwa segala kegiatan investasi akan menghasilkan di kemudian hari. Jumlah pendapatan, biaya dan lain-lain yang terjadi akan menentukan seorang investor mau mengluarkan modal atau tidak. Makin besar resiko yang berkaitan dengan arus pendapatan di kemudian hari, makin kecil kemauan seorang investor mengeluarkan modalnya. Paling tidak, seorang investor mengharapkan modal kembali plus sejumlah pendapatan bersih yang cukup untuk mengimbangi resiko dan ketidakpastian investasi di kemudian hari. Dengan kata lain, setiap kegiatan yang hendak menanamkan uang dengan aman dapat juga digolongkan sebagai kegiatan investasi.

Dalam rangka menentukan suatu kriteria tentang layak tidaknya suatu proyek, telah dikembangkan berbagai macam kriteria. Disamping itu, kriteria investasi ini dapat juga dipakai untuk menentukan prioritas atau urutan ranking dari berbagai usul investasi menurut tingkat keuntungan masing-masing.

Pengembangan metode pemilihan investasi secara umum dapat digolongkan ke dalam dua kelompok besar yaitu perhitungan investasi *statis* dan perhitungan investasi dinamis. Masing-masing kelompok tersesbut masih akan diuraikan secara cukup representatif dan akan dibicarakan satu persatu.

4.3.1 Investasi Statis

Analisis investasi statis mengasumsikan bahwa arus dana dianggap konstan karena pada analisis statis ini tidak memasukkan faktor suku bunga di dalamnya. Hal ini dianggap kurang realistis karena sifat konstan arus dana selama jangka waktu beberapa tahun dak dapat dipertahankan lagi. Namun demikian, faktor suku bunga dapat juga digunakan pada perhitungan-perhitungan investasi statis.

Ada 4 (empat) kriteria investasi statis yang dirangkum dalam buku ini yaitu kriteria perbandingan biaya (*cost comparison*), perbandingan keuntungan (*profit comparison*), rentabilitas dan amortisasi. Kriteria tersebut akan dibicarakan secara garis besar saja mengingat pada analisis investasi statis ini kurang banyak diminati, disamping itu pembahasan masalah investasi pada buku ini dititikberatkan pada analisis investasi dinamis.

4.3.1.1 Perbandingan Biaya

Kriteria pemilihan investasi cara perbandingan biaya ini diberangkat dari penilaian biaya produksi satuan yang terkecil. Jika proyek mempunyai biaya atau ongkos produksi satuan yang lebih kecil maka proyek itulah yang akan dipilih. Dengan demikian, jika ada beberapa proyek yang menghasilkan produk yang sama, maka urutan-urutan alternatif yang dipilih akan dimulai dari proyek-proyek yang mempunyai ongkos produksi satuan dari yang terkecil sampai yang paling besar.

Contoh 19. Seorang pengusaha mempunyai dua alternatif pabrik yang keduanya mempunyai umur ekonomis 15 tahun. Biaya investasi masing-masing pabrik diperkirakan mencapai 400 juta untuk pabrik A dan 500 rupiah juta untuk pabrik B, sedangkan kapasitas produksi masing-masing pabrik sama yaitu 20.000 unit per tahun. Seperti pada tabel di bawah ini, pabrik mana yang akan dipilih.

Uraian	Satuan	Pabrik A	Pabrik B
1. Modal	Rp juta	400	500
2. Kapasitas produksi	Unit/tahun	20.000	20.000
3. Umur ekonomis	Tahun	15	15
4. Baya produk			
- Bahan baku	Rp juta/tahun	35	35
- Gaji rutin	Rp juta/tahun	5	9
- Maintenan peralatan	Rp juta/tahun	10	13
- Lain-lain	Rp juta/tahun	5	7
5. Depresiasi	Rp juta/tahun	40	50
6. Cicilan bunga	Rp juta/tahun	20	25
a. Biaya Total (Rp)		115.000.000	139.000.000
b. Biaya produksi satuan (Rp)		5.750	6.950
Laba pabrik A > B $\rightarrow$ pabrik A yang dipilih			

4.3.1.2 Perbandingan Keuntungan

Kriteria pemilihan investasi cara perbandingan keuntungan ini sama dengan kriteria perbandingan biaya dimana proyek yang mempunyai keuntungan yang lebih besar yang akan dipilih. Kriteria dengan cara ini banyak sekali mendapat kritikan-kritikan karena model perbandingan keuntungan ini melepaskan kaitan yang cukup penting antara biaya total dalam hubungannya dengan struktur modal ataupun masalah finansial yang muncul sebagai faktor yang sangat menentukan dalam kriteria pemilihan suatu proyek.

Contoh 20. Seperti pada contoh soal diatas, jika kapasitas produksi pabrik A sebesar 21.000 unit per tahun dan harga satuan penjualan masing-masing produksi sama yaitu Rp 10.000 per unit, pabrik manakah yang akan dipilih?

Uraian	Satuan	Pabrik A	Pabrik B
5. Modal	Rp juta	400	500
5. Kapasitas produksi	Unit/tahun	20.000	20.000
5. Umur ekonomis	Tahun	15	15
5. Baya produk			
- Bahan baku	Rp juta/tahun	35	35
- Gaji rutin	Rp juta/tahun	5	9
- Maintenan peralatan	Rp juta/tahun	10	13
- Lain-lain	Rp juta/tahun	5	7
5. Depresiasi	Rp juta/tahun	40	50
5. Cicilan bunga	Rp juta/tahun	20	25
a. Biaya Total (Rp)		115.000.000	139.000.000
b. Biaya produksi satuan (Rp)		5.750	6.950
c. Pendapatan dihitung menurut kapasitas produksi total		210.000.000	200.000.000
d. Keuntungan/laba (c-4)		95.000.000	61.000.000
Laba pabrik A > B → pabrik A yang dipilih			

4.3.1.3 Rentabilitas

Rentabilitas adalah perbandingan antara tingkat keuntungan atau laba dengan modal yang dicerminkan dalam persamaan berikut

$$\text{Rentabilitas} = \frac{\text{Keuntungan}}{\text{Modal}} \text{x}100\% \qquad 5-20$$

Rentabilitas dapat juga didefinisikan sebagai laju balik modal (*Return On Investment atau ROD*). Dengan demikian kriteria ini memungkinkan bagi seorang investor mengambil keputusan dalam pemilihan suatu proyek yaitu proyek yang mempunyai tingkat rentabilitas yang tertinggi yang akan dipilih.

Pada kasus pemilihan pabrik diatas, dapat dihitung tingkat stabilitas masing-masing pabrik yaitu:

$$\text{Rentabilitas}\rightarrow\text{A} = \frac{95.000.000}{400.000.000}\text{x}100\% = 23{,}75\%$$

$$\text{Rentabilitas}\rightarrow\text{B} = \frac{61.000.000}{500.000.000}\text{x}100\% = 12{,}20\%$$

Rentabilitas A > B → pabrik A yang dipilih.

4.3.1.4 Amortisasi

Amortisasi adalah waktu yang diperlukan mulai awal kegiatan proyek hingga biaya-biaya dan modal yang dikeluarkan sama dengan pendapatan dari penjualan produk. Jika waktu amortisasi dinotasikan sebagai T_A, maka waktu amortisasi dinyatakan dalam hubungan berikut ini:

$$T_A = \frac{1}{R - C} = T_k \qquad 5 - 21$$

dimana, I = Investasi

R = Pendapatan penjualan

C = Biaya yang dikeluarkan

T = Waktu konstruksi

Contoh 21. Sebuah pabrik perakitan mobil mempunyai waktu konstruksi 3 tahun dengan investasi awal sebesar Rp 3 milyar. Jika penjualan per tahun diproyeksikan sebesar Rp. 2 milyar dan biaya-biaya diperkirakan mencapai Rp 1 milyar termasuk bunga pinjaman. Hitunglah waktu amortisasi jika dikenakan pajak sebesar 50%.

Diketahui,

I = Rp. 3.000.000.000 R = Rp. 2.000.000.000 T_k = 3 tahun

C = Rp. 1.000.000.000 + {50% x (2.000.000.000 – 1.000.000.000)}

= Rp. 1.500.000.000,-

Waktu amortasi

$$T_A = \frac{1}{R - C} + T_k = \frac{3.000.000.000}{2.000.000.000 - 1.500.000.000} + 3$$

$$= \frac{3.000.000.000}{5.000.000.000} + 3 = 6 + 3 = 9$$

Jadi, waktu amortisasi pabrik mobil adalah 9 tahun.

4.3.2 Investasi Dinamis

Berbeda dengan perhitungan-perhitungan investasi statis, pada analisis investasi dinamis faktor tingkat suku bunga sangat berperan di dalam pembicaraan dan merupakan bagian penting dari investasi model dinamis. Di sini digunakan prinsip nilai waktu dari uang.

Ada 5 (lima) kriteria investasi dinamis yang dibicarakan dalam bab ini. Uraian berikut akan menjelaskan masing-masing kriteria tersebut.

4.3.2.1 Net Present Value (NPV)

Pendapatan bersih sekarang adalah suatu model untuk membandingkan pendapatan (*benefit*) dan biaya (*cost*) dengan cara mendiskontokan masing-masing ke waktu sekarang. Semua biaya yang telah didiskon dijumlah dan dikurangkan pada pendapatan diskon akan terdapat selisih (nilai sekarang) pendapatan bersih.

Secara matematis, nilai NPV dari arus-arus benefit dan biaya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mathrm{NPV} = [\frac{B_1}{(1+i)^1} + \frac{B_2}{(1+i)^2} + \frac{B_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{B_n}{(1+i)^n}] - [\frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \frac{C_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{C_n}{(1+i)^n}]$$

$$= \sum_{t=1}^{n} [\frac{B_t - C_t}{(1+i)^2}] \qquad 5-22$$

Keterangan: B_t = Pendapatan/benefit pada tahun ke-4.

C_1 = Biaya pada tahun ke-t.

1% = Suku bunga yang ditunjukkan sebagai sosial (*social discount rate*).

t = Tahun pendapatan diterima dan biaya dikeluarkan

n = Periode investasi (umur ekonomis)

Jika: NPV > 0 : Proyek "go" (diterima).

NPV = 0 : Proyek mengembalikan persis sama dengan suku bunga sosial (*social discount rate*).

NPV < 0 : Proyek ditolak, artinya ada penggunaan lain yanglebih menguntungkan untuk sumber diperlukan.

4.3.2.2 Internal Rate of Return (IRR)

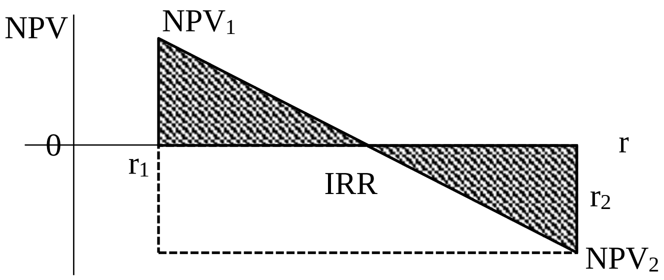
IRR (Internal Rate of Return) adalah faktor diskon yang dapat menjadikan NPV sama dengan nol, atau nilai sekarang jumlah arus pendapatan yang diharapkan di kemudian hari sama dengan biaya proyek tersebut. Jika pada kriteria NPV suku bunga ditentukan lebih dahulu, maka pada perhitungan IRR ini justru yang akan dicari adalah suku bunga (r%) yang menjadikan arus pendapatan dan biaya tersebut berjumlah nol.

Secara matematis, penyataan ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\mathrm{NPV} = \sum_{t=1}^{n} \left[\frac{B_t}{(1+i)^1}\right] - \sum_{t=1}^{n} \left[\frac{C_t}{(1+r)^1}\right] = 0 \text{ sehingga}$$

$$\mathrm{NPV} = \sum_{t=1}^{n} \left[\frac{B_t - C_t}{(1+i)^1}\right] = 0$$

Untuk menghitung harga secara langsung sangat sulit dilakukan. Pemecahan persoalan ini dapat ditempuh dengan cara coba-cba (*trial and error*) yang mencari NPV, dengan sebarang r_i, lalu dicari lagi untuk NPV_2 pada suku bunga r_2. Asalkan salah satu kedua perkiraan NPV tidak terlalu jauh dari not (yang baik jika NPV_1 dan NPV_2 berlawanan tanda), maka perkiraan nilai IRR dapat dipecahkan dengan interpolasi sebagai berikut:



Gambar 5.5 Mencari IRR

Kurva lengkung pada Gambar 5.5 diatas akan memotong sumbu untuk nilai NPV = 0 dan harga adalah IRR yang kita dicari. Dengan cara interpolasi, gambar tersebut dapat dipandang bahwa segitiga-segitiga r_1 = IRR – NPV_1 dan r_2 – IRR – NPV_2 dianggap mempunyai sisi-sisi harus yaitu garis NPV_1-IRR-NPV_2 dianggap garis lurus. Dengan mengetahui nilai NPV_1 dengan sembarnag r_1 dan nilai NPV_1 dengan sembarang r_2 maka secara matematis pernyataan ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\mathrm{IRR} = r_1 + \frac{NPV_1}{NPV_1 - NPV_2}(r_2 - r_1) \qquad 5-24$$

atau

$$\mathrm{IRR} = r_2 + \frac{NPV_2}{NPV_1 - NPV_2}(r_2 - r_1) \qquad 5-25$$

Jika: IRR > i :Proyek diterima.

IRR = i : Mengembalikan persis sama dengan suku bunga sosial (*social discount rate*) yang menjadikan NP = 0.

IRR <1: Proyek ditolak. Ada penggunaan lain yang lebih menguntungkan untuk sumber-sumber yang diperlukan.

Kriteria IRR ini dapat diartikan bahwa suatu kegiatan investasi dapat diterima jika nilai IRR lebih besar dari suku bunga sosial ataupun bila IRR lebih besar daripada biaya modal.

4.3.2.3 Net Benefit-Cost (NET B/C)

Analisis Net B/C adalah variasi dari Net Present Value Kriteria ini digunakan pada proyek-proyek pemerintah yang seringkali nilai benefit (manfaat) atau biaya yang terjadi pada proyek tidak dapat atau sulit diperoleh. Pada proyek pemerintah, manfaat (*benefit*) mempunyai pengertian yang cukup luas daripada yang disebut keuntungan (*profit*) pada proyek swasta. Suatu manfaat yang ditimbulkan oleh suatu proyek publik adalah benefit (manfaat) tanpa melihat kepada siapa manfaat itu diberikan.

Kriteria Net B/C dapat didefinisikan sebagai perbandingan dari present value total manfaat-manfaat bersih suatu proyek ($B_t - C_t$) positif dibagi dengan present value total dari biaya-biaya bersih kegiatan proyek ($B_t - C_t$) negatif. Jika proyek merupakan proyek pemerintah, maka besaran B, mempunyai interpretasi sebagai manfaat proyek terhadap publik atau masyarakat secara keseluruhan tanpa melihat apakah mereka turut memikul biaya atau tidak. Sedangkan C_t pajak tidak dianggap biaya proyek karena hanya memindahkan dari sektor masyarakat ke yang lain.

Secara matematis, penyataan ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{NetB}{C} = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left[\frac{B_t - C_t}{(1+i)^1}\right] \ldots\ldots [B_t - C_t] > 0}{\sum_{t=1}^{n}\left[\frac{C_t - B_t}{(1+i)^1}\right] \ldots\ldots [B_t - C_t] < 0} \qquad 5-26$$

Jika: Net B/C > 1 → Proyek diterima.

Net B/C < 1 → Proyek ditolak

Nilai Net B/C dapat dihitung jika terdapat paling sedikit salah satu dari angka $B_t - C_t < 0$ (negatif). Jika tidak demikian, maka nilai Net B/C maupun nilai IRR akan menjadi tak terhingga.

Contoh soal berikut ini menunjukkan aplikasi dari ketiga kriteria di atas (NPV, IRR, Net B/C) untuk menentukan go tidaknya suatu proyek dengan cara menentukan harga indeks-indeks dari ketiga kriteria tersebut.

Contoh 22. Seorang investor akan melakukan investasi pada suatu proyek. Diperkirakan umur proyek 20 tahun. Jumlah pendapatan (manfaat) dan biaya dari proyek disajikan pada tabel di bawah ini:

dalam rupiah

Tahun	Biaya	Manfaat (Benefit)
1	45.000.000	0
2	15.000.000	25. 000.000
3	15.000.000	25. 000.000
4	15.000.000	20. 000.000
5-15	15.000.000	30. 000.000
6-20	15.000.000	30. 000.000

Jika digunakan tingkat suku bunga diskonto 18%, hitunglah a). NPV, b). IRR dan c). Net B/C dari proyek tersebut dan berikan analisis apakah proyek tersebut layak diteruskan atau tidak.

Penyelesaian dapat dibuat dengan tabulasi:

(dalam juta rupiah)

Tahun	DF 18%	B_1	C_1	Net	Nilai Sekarang (NPV)		
				$B_1 - C_1$	B_t	C_t	$B_t - C_t$
1	0,847	0	45	-45	0	38,136	-38,136
2	0,718	25	15	10	17,955	10,773	7,182
3	0,608	25	15	10	15,216	9,129	6,086
4	0,515	20	15	5	10,316	7,737	2,579
5-15	2,401	30	15	15	72,045	36,023	36,023
16-20	0,261	30	15	15	7,835	3,918	3,918
Jumlah	-	130	120	10	123,367	105,715	17,652

Dari tabel di atas dapat dihitung:

a. NPV pada 18% = Rp17.652.000,- (kolom-8)

b. $=25\% + \frac{NPV_{25\%}}{NPV_{25\%} - NPV_{26\%}}$ (26% – 25%)

$= 25\% + \frac{1{,}452}{1{,}452 - (-0{,}110)} x1\%$

= 25% + 0,93%

= 25,93%

c. Net B/C Rasio pada 18% = $\frac{Rp55.786.000,-}{Rp38.136.000,-}$ = 1,463

d. Hasil evaluasi > 0,IRR > 18% dan Net B/C > 1 sehingga proyek tersebut *layak* diteruskan ("*go*").

4.3.2.4 Gross Benefit-Cost Ratio (GROSS B/C)

Di samping ketiga kriteria investasi yang telah diuraikan di atas, ada telaah lain yang mempunyai tingkat kesamaan yang cukup tinggi-meskipun kriteria ini banyak kritikan-kritikan dari segi teori-adalah apa yang disebut *Gross Benefit Cost Ratio* yaitu:

$$\text{Gross B/C} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left[\frac{B_t - C_t}{(1+i)^t}\right]}{\sum_{t=1}^{n} \left[\frac{C_t}{(1+i)^t}\right]} \qquad 5-27$$

Rumus ini sangat berbeda dengan rumas sebelumnya (Net B/C), karena arus pendapatan (benefit) kotor dan arus pengeluaran (biaya) kotor didiskonto secara terpisah yang menyebabkan Gross B/C sangat peka terhadap berbagai perubahan pada pos-pos biaya rutin terhadap benefit kotor tiap tahun. Dengan demikian, sebagai salah satu kriteria penilaian proyek, kriteria Gross B/C ratio hendaknya tidak dipakai dalam analisis benefit-cost.

4.3.2.5 Profitibility Indeks

Pemilihan kriteria investasi dengan metode Profitability *Indeks* (PI) ini juga -seperti halnya Gross B/C- sering mengelirukan. Profitability Indeks dapat didefinisikan sebagai angka perbandingan nilai sekarang dari benefit suatu proyek dibagi dengan biaya investasi pada awal proyek. Indeks ini membedakan antara biaya modal K, dengan biaya rutin C, Rumus profitability indeks ini adalah:

$$\text{Profitability Indeks (PI)} = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left[\frac{B_t - C_t}{(1+i)^t}\right]}{\sum_{t=1}^{n} K_1} \qquad 5-27$$

Bila rumus di atas dipakai untuk menilai suatu proyek swasta, maka B, dapat diartikan sebagai pendapatan total penjualan selama kurun waktu t tahun, sedangkan C, berarti semua pos-pos pengeluaran selama kurun waktu proyek termasuk pajak, depresiasi, tips, dana siluman, biaya KKN (korupsi, kolusi dan nepotisme) yang haru dikeluarkan oleh perusahaan. Angka perbandingan Pl umumnya lebih mendekati Net B/C Ratio. Jika benefit dan biaya rutin mulai muncul hanya sesudah proses investasi selesai yaitu jika biaya tahunan pertama suatu proyek hanya pada biaya modal saja maupun biaya rutinnya tidak lebih dari benefit kotomya, maka indeks ini akan persis sama dengan Net B/C ratio-nya.

Contoh 23. Jika suku bunga i = 18% sedangkan harga-harga investasi awal sama (seperti contoh 22), hitunglah Gross B/C ratio dan Profitability Indeks (PD)nya.

Dengan melihat hasil-hasil perhitungan yang tertuang dalam tabel, maka hasil perhitungan di depan antara lain:

a. Profitability Indeks (PI) $= \dfrac{\text{Rpl } 23.367.000,- \quad (\text{kolom} - 7)}{\text{Rp}105.715.000,- \quad (\text{kolom} - 6)}$

= 1,167

b. Besaran $\sum_{t=1}^{n}\left[\frac{B_t - C_t}{(1+i)^t}\right]$ = 55,788 (juta) dan $\sum_{t=1}^{n} K_t = 38{,}136(\text{juta})$

sehingga Profitability Indeksnya adalah

$$PI = \frac{\text{Rp}55.788.000,-}{\text{Rp}38.136.000,-} = 1{,}463$$

Hasil Pl ini ternyata sama dengan Net B/C ratio-aya (karena investasi awal atau modal hanya sekali saja muncul pada tahun pertama).

Contoh 24. Seorang pengusaha akan melakukan investasi pada suatu proyek. Diperkirakan umur proyek 10 tahun. Jumlah pendapatan dan biaya dari proyek disajikan pada tabel di bawah ini. Jika digunakan tingkat suku bunga diskonto 17%, hitunglah:

a) NPV
b) IRR,
c) Net B/C,
d) Gross B/C dan
e) Profitability Indeks (PI).

dalam rupiah

Tahun	Biaya			Manfaat/benefit
	Modal	-	Rutin	
1	200.000.000		0	0
2	10.000.000		10.000.000	75.000.000
3	0		25.000.000	85.000.000
4	0		20.000.000	90.000.000
5	0		15.000.000	100.000.000
6	0		15.000.000	100.000.000
7	0		20.000.000	115.000.000
8	0		15.000.000	110.000.000
9	0		15.000.000	100.000.000
10	0		20.000.000	75.000.000

Penyelesaian dapat dibuat dalam bentuk tabulasi yaitu :

(dalam juta rupiah)

Tahun	DF 17%	B_t	C_t	Net $B_t - C_t$	Nilai Sekarang (NPV)		
					B_t	C_t	$B_t - C_t$
1	0,855	0	200	-200	0	170,940	-170,940
2	0,731	75	20	55	54,789	14,610	40,178
3	0,624	85	25	60	53,071	15,609	37,462
4	0,534	90	20	70	48,071	10,673	37,356
5	4,56	100	15	85	45,611	6,842	38,769
6	0,389	100	15	85	38,984	5,848	33,136

7	0,333	115	20	95	38317	6,662	31,654
8	0,385	110	15	95	10,316	4,272	27,054
9	0,243	100	15	85	24,306	3,651	20,689
10	0,208	75	20	55	15,603	3,161	11,442
Jumlah	-	850	365	485	243,269	350,070	106,801

Tahun	Net $B_t - C_t$	DF 32%	NPV $B_t - C_t$	DF 33%	NPV B – C (r=33%)
1	-200	0,758	-151,515	0,752	-150,376
2	55	0,574	31,566	0,565	31,093
3	60	0,435	26,087	0,425	25,503
4	70	0,329	23,057	0,320	22,371
5	85	0,250	21,210	0,240	20,425
6	85	0,189	16,069	0,181	15,357
7	95	0,143	13,605	0,136	12,905
8	95	0,108	10,307	0,102	9,703
9	85	0,082	6,986	0,077	6,528
10	55	0,062	3,425	0,058	3,176
Jumlah	485	-	0,797	-	-3,315

Dari tabel tabulasi di atas dapat dihitung :

a. NPV pada 17% = Rp 106.801.000,-

b. IRR = 32% + $\frac{\mathrm{NPV}_{32\%}}{\mathrm{NPV}_{32\%} - \mathrm{NPV}_{33\%}}$(33% – 32%)

$$= 32\% + \frac{0{,}979}{0{,}797 - (-3{,}315)} \text{x1\%}$$

= 32% + 0,194%

= 32,14%

c. Net B/C Ratio pada 17% = $\frac{\mathrm{Rp}277.741.000,-}{\mathrm{Rp}170.940.000,-}$ 1,625

d. Gross B/C Ratio = $\frac{\mathrm{Rp}350.070.000,-}{\mathrm{Rp}243.269.000,-}$ 1,439

e. Pembentukan modal: $\sum_{t=1}^{n} K_t$ = (170.940.000 + 7.305.000) sehingga, PI = $\dfrac{\text{Rp}277.741.000,-}{\text{Rp}178.245.000,-}$ = 1,558

4.4 DEPRESIASI: DERET FUNGSI EKONOMI

Seperti halnya pembahasan mengenai teori finansial, teori deret juga banyak dipakai dalam perhitungan penghapusan atau depresiasi (*depreciation*). Sehubungan dengan itu, selanjutnya akan kita bahas penerapan teori deret pada masalah depresiasi.

Setiap barang mempunyai umur, begitu juga untuk setiap sistem produksi. Suatu perusahaan diharapkan dapat berumur lama dan untuk itu setiap perusahaan perlu mengalokasikan anggaran biaya bagi kelangsungan usahanya yaitu dengan apa yang disebut dana penghapusan. Dengan demikian, pengertian depresiasi adalah susutnya nilai suatu aset tetap yang disebabkan oleh aus dan koyak selama digunakan sepanjang waktu. Biaya suatu aset, baik itu pabrik atau mesin tidak dapat dibebankan sekaligus pada tahun pembelian, tetapi harus disebar pada umur tahun aset itu dapat digunakan. Selama umur aset, nilai modal investasinya akan terus-menerus susut dengan yang ditentukan oleh beberapa metode.

4.4.1 Depresiasi Garis Lurus

Pada metode Depresiasi Garis Lurus (*Straight-Line Depreciation*) ini, modal investasi dibebani penyusutan terus-menerus setiap tahun dengan laju yang sama tanpa mempertimbangkan pengaruh suku bunga maupun efek inflasi. Jika aset awal disimbolkan dengan Po, nilai akhir aset Na dan ummir aset n, maka beban depresiasi atau penyusutan setiap tahun t adalah,

$$D_1 = \frac{P_o - N_a}{n} \qquad 5-29$$

Untuk menghitung nilai buku (book value) pada akhir tahun ke-t ialah mengurangi aset awal dengan kumulasi depresiasi hingga pada tahun ke-t tersebut.

Secara matematis dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$B_t = P_o - (t-1)\left[\frac{P_o - Na}{n}\right] \qquad 5-30$$

Contoh 25. Traktor sarad dibeli dengan harga \$ 250.000. Jika umur pakai 10 tahun dengan nilai bekas \$ 50.000, hitunglah nilai buku pada tahun ke-5 dan tahun ke-11. Depresiasi rata-rata per tahun:

$$D_t = \frac{P_o - Na}{n} = \frac{\$250.000 - \$50.000}{10}$$

= \$20,000

Beban depresiasi tahunan adalah \$ 20.000

Nilai buku pada tahun ke-5:

$$B_{1t} = P_o - [t - 1]\,[\frac{P_o - Na}{n}] = 250.000 - (5 - 1)(20.000)$$

= \$ 170.000

Nilai buku pada tahun ke-11:

$$B_{1t} = P_o - [t - 1]\,[\frac{P_o - Na}{n}] = 250.000 - (11 - 1)(20.000)$$

= \$ 50.000

4.4.2 Depresiasi Jumlah Bilangan Tahun

Pada Depresiasi Jumlah Bilangan Tahun (*Sum Of The Year's Digit*), penyusutan tahunan dihitung dengan menggunakan hasil bagi jumlah digit jumlah tahun pemakaian dengan jumlah tahun pemakaian yang belum dilaksanakan (sisa). Faktor ini kemudian dikalikan dengan aset awal dikurangi nilai bekasnya. Dengan demikian beban depresiasi pada tahun ke-1 adalah:

$$D_1 = \frac{n - 1(t - 1)}{\frac{1}{2}n(n + 1)}[P_o - Na] \qquad 5 - 31$$

Nilai buku B, pada akhir tahun ke-t adalah nilai aset awal dikurangi jumlah kumulatif depresiasi hingga tahun ke-t yaitu:

$$B_t = P_o - \sum_{i=0}^{n} D_1 \qquad 5 - 32$$

atau

$$B_t = P_o - [D_1 + D_2 + D_3 + \ldots\ldots + D_{t-1}] \qquad 5 - 33$$

Contoh 26. Seperti contoh-25 di atas, tentukan nilai buku pada tahun ke-5 dan tahun ke-11 dengan menggunakan metode SOYD tersebut.

Diketahui: Umur pakai n = 10 $\rightarrow$ ½ n (n+1) = ½ . 10 (11) = 25

P_n = \$ 250.000 dan Na = \$ 50.000

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang diketahui pada rumus 5-31 maka,

$$\text{Pada t} = 1, D_1 = \frac{10-(1-1)}{55}(250.000-50.000) = \$36.364$$

$$\text{Pada t} = 2, D_2 = \frac{10-(2-1)}{55}(250.000-50.000) = \$32{,}727$$

$$\text{Pada t} = 3, D_3 = \frac{10-(3-1)}{55}(250.000-50.000) = \$29.091$$

$$\text{Pada t} = 4, D_4 = \frac{10-(4-1)}{55}(250.000-50.000) = \$25.455$$

$$\text{Pada t} = 5, D_5 = \frac{10-(5-1)}{55}(250.000-50.000) = \$21{,}818$$

$$\text{Pada t} = 6, D_6 = \frac{10-(6-1)}{55}(250.000-50.000) = \$18{,}182$$

$$\text{Pada t} = 7, D_7 = \frac{10-(7-1)}{55}(250.000-50.000) = \$14{,}545$$

$$\text{Pada t} = 8, D_8 = \frac{10-(8-1)}{55}(250.000-50.000) = \$10.909$$

$$\text{Pada t} = 9, D_9 = \frac{10-(9-1)}{55}(250.000-50.000) = \$7{,}273$$

$$\text{Pada t} = 10, D_{10} = \frac{10-(10-1)}{55}(250.000-50.000) = \$3.636$$

$$\text{Pada t} = 11, D_{11} = \frac{10-(11-1)}{55}(250.000-50.000) = 0$$

Nilai buku pada tahun ke-5:

B_5 = Po – [D_1 + D_2 + D_3 + D_4]

= 250.000 – [36.364 + 32.727 + 29.091 + 25.455]

= 250.000 – 123.637

= \$126.363

Nilai buku pada tahun ke-11:

B_{11} = Po – [D_1 + D_2 + D_3 +............... + D_{10}]

= 250.000 – [36.364 + 32.727 + 29.091 + 25.455 + 21.818]

+ 18.182 + 14.545 + 10.909 + 7.273 + 3.636]

= 250.000 – 200.000

= \$ 50.000

4.4.3 Depresiasi Neraca Menurun

Pada Depresiasi Neraca Menurun (*Declining Balance Depreciation*) ini, laju atau persentase konstan nilai buku ditetapkan sebagai besarnya depresiasi. Jika pembilang-pembilang dari peryataan depresiasi dinyatakan oleh k maka,

$$D_t = \frac{k}{n} B_t \qquad 5-34$$

Nilai buku tahun ke-t adalah nilai aset awal Po dikurangi kumulatif beban depresiasi hingga tahun ke (t-1).

Pada t = 1. $D_1 = \frac{k}{n} B_1 = \frac{k}{n} [Po - Do] = \frac{k}{n} Po$

Pada t = 2. $D_2 = \frac{k}{n} B_2 = \frac{k}{n} [Po - D_1] = \frac{k}{n} Po\left[1 - \frac{k}{n}\right]$

Pada t = 3. $D_2 = \frac{k}{n} B_3 = \frac{k}{n}[Po - D_1 - D_2] = \frac{k}{n} Po \left[1 - \frac{k}{n}\right]^2$

Secara umum pada tahun ke-t:

$$D_1 = \frac{k}{n} Po \left[1 - \frac{k}{n}\right]^{t-1} \qquad 5-35$$

Sehingga nilai suku B, pada tahun ke-t adalah:

$$B_1 = Po \left[1 - \frac{k}{n}\right]^{t-1} \qquad 5-36$$

Bila aset yang bersangkutan mempunyai nilai akhir pada tahun akhir ke-n atau pada akhir umur proyek, maka nilai buku yang dihitung harus sama dengan nilai akhir yaitu :

$$B_1 = Po \left[1 - \frac{k}{n}\right]^{n} = Na \qquad 5-37$$

Bila k/n dinyatakan persentase tetap dengan simbol pct, maka, rumus 5-37 dapat diturunkan menjadi,

$$pct = 1 - \left[\frac{Na}{P_o}\right]^{1/n} \qquad 5-38$$

contoh 27. Kembali pada contoh 25, hitunglah depresiasi dengan metode neraca menurun, tentukan nilai buku pada tahun ke-5 dan tahun ke-11 dengan menggunakan metode ini.

Untuk $n = 10, pct = 1 - [\frac{Na}{P_o}]^{\frac{1}{n}} = 1 - [\frac{50.000}{250.000}]^{\frac{1}{10}}$

Dengan mensubstitusikan pct, maka k = n.pct = 10 (0.1487) = 1.487

Beban depresiasi pada tahun ke-5 dan ke-11 adalah:

Pada $t = 5, D_5 = \frac{k}{n} P_o [1 \frac{k}{n}]^{5-1} = \frac{1,487}{10} 250.000 [1 - \frac{1,487}{10}]^4$

= 37.175 (0,5252)

= $ 19.525

Pada $t = 11, D_1 = \frac{k}{n} P_o [1 \frac{k}{n}]^{11-1} = \frac{1,487}{10} 250.000 [1 - \frac{1,487}{10}]^{10}$

= 37.175 (0,2)

= $ 7.472

Nilai buku pada tahun ke-5 dan ke-11 adalah:

Pada $t = 5, -B_5 = P_o [1 \frac{k}{n}]^{5-1} = 250.000 [1 - \frac{1,487}{10}]^4$

= 250.000 (0,5252)

= $ 131.300

Pada $t = 11, -B_{11} = P_o [1 \frac{k}{n}]^{11-1} = 250.000 [1 - \frac{1,487}{10}]^{10}$

= 250.000 (0,2)

= $ 50.000

4.4.4 Depresiasi Satuan Produksi

Depresiasi Satuan Produksi (*Unit of Production*) ini didasarkan atas kapasitas penggunaan misalnya (dalam volume) dan bukan pada perjalanan waktu. Setelah itu, peralatan atau aset produksi dinyatakan hapus. Oleh karena itu, bila H, merupakan volume penggunaan selama tahun yang bersangkutan (tahun yang ditinjau) dan total volume produksi dinyatakan dengan Ho, maka beban depresiasi pada tahun t adalah:

$$D_i = \frac{H_i}{H_o} [Po - Na] \qquad 5 - 39$$

Contoh 28. Sebuah traktor yang dimanfaatkan untuk pengangkutan kayu yang mempunyai jadwal kerja selama 10 tahun dengan volume kayu berturut-turut: 2.500 m^3, 2.000 m^3, 1.500 m^3, 1.250 m^3, 1.000 m^3, 750 m^3, 500 m^3, 250 m^3, 150 m^3, dan 100 m^3 per tahun. Hitunga berapa nilai buku pada tahun ke-5 dan tahun ke-11.

Diketahui: P, \$ 250.000 N_a - \$ 50.000 dan H_o = 10.000 m^3
Dengan mensubstitusikan pada rumus 5-39, maka diperoleh:

Pada t = 1, $H_1 = 2.500\ m^3 \rightarrow D_1 = \dfrac{2.500}{10.000}[250.000 - 50.000]$
= \$ 50.000

Pada t = 2, $H_2 = 2.000\ m^3 \rightarrow D_2 = \dfrac{2.000}{10.000}[250.000 - 50.000]$
= \$ 40.000

Pada t = 3, $H_3 = 1.500\ m^3 \rightarrow D_3 = \dfrac{1.500}{10.000}[250.000 - 50.000]$
= \$ 30.000

Pada t = 4, $H_4 = 1.250\ m^3 \rightarrow D_4 = \dfrac{1.250}{10.000}[250.000 - 50.000]$
= \$ 25.000

Pada t = 5, $H_5 = 1.000\ m^3 \rightarrow D_5 = \dfrac{1.000}{10.000}[250.000 - 50.000]$
= \$ 20.000

Pada t = 6, $H_6 = 750\ m^3 \rightarrow D_6 = \dfrac{750}{10.000}[250.000 - 50.000]$
= \$ 15.000

Pada t = 7, $H_7 = 500\ m^3 \rightarrow D_7 = \dfrac{500}{10.000}[250.000 - 50.000]$
= \$ 10.000

Pada t = 8, $H_8 = 250\ m^3 \rightarrow D_8 = \dfrac{250}{10.000}[250.000 - 50.000]$
= \$ 5.000

Pada t = 9, $H_9 = 150\ m^3 \rightarrow D_9 = \dfrac{150}{10.000}[250.000 - 50.000]$
= \$ 3.000

Pada t $= 10$, $\quad H_{10} = 100\ m^3 \rightarrow D_{10} = \dfrac{100}{10.000}\ [250.000 - 50.000]$

$= \$\ 2.000$

Nilai buku pada tahun ke-2:

$B_5 \quad = P_e - [D_1 + D_2 + D_3 + D_4]$

$= 250.000 - (50.000 + 40.000 + 30.000 + \ldots\ldots + 2.000)$

$= 250.000 - 200.000$

$= \$\ 105.000$

Nilai buku pada tahun ke-11:

$B_{11} \quad = Po - [D_1 + D_2 + D_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + D_{10}]$

$= 250.000 - (50.000 + 40.000 + 30.000 + \ldots\ldots + 2.000)$

$= 250.000 - 200.000$

$= \$\ 50.000$

4.4.5 Depresiasi Cara Anuitet

Paa metode anuitet, bahan depresiasi dapat dicari dengan mengasumsikan bahwa kita mendepositokan sejumlah dana tertentu setiap tahunnya. Menurut metode ini nilai aset awal dikurangi dengan nilai aset akhir (bekas) akan sama dengan sejumlah deposito yang setiap tahun kita tanam.

Jika aset awal Po, nilai aset akhir (bekas) Na dan dasar suku bunga per tahun yang berlaku sebesar i%, maka besarnya dana tiap tahun R yang didepositokan, secara umum dapat dirumuskan:

R = F(R/F.i,n) = [Po – Na] [R/F/i,n]

$$= [\mathrm{Po} - \mathrm{Na}]\ \left[\frac{\mathrm{i}}{(1+i)^{\mathrm{n}} - 1}\right] \qquad 5 - 40$$

Contoh 29. Dengan menggunakan data-data contoh-25, berapakah besarnya deposito tahunan yang disimpan jika suku bunga sebesar 18%.

$$R = [\mathrm{Po} - \mathrm{Na}]\ \left[\frac{\mathrm{i}}{(1+i)^{\mathrm{n}} - 1}\right] = [250.000 - 50.000]\ \left[\frac{0{,}18}{(1+0{,}18)^{10} - 1}\right]$$

$$= 200.000\ \left[\frac{0{,}18}{(1+0{,}18)^{10} - 1}\right]$$

Misalkan $x = 1{,}18^{10}$ maka log x = 10 log 1,18

$$= 10(0{,}0719) = 5{,}2338$$

$$x = \text{antilog } 0{,}719 = 5{,}2338$$

Sehingga R = 200.000 $\left[\frac{0{,}18}{4{,}2338}\right]$= 200.000 (0,0425) = 8.500

Atau dapat juga dicari dengan menggunakan Lampiran VII (R/F, 18%, 10) = 0,0425.

Sehingga,

R = 200.000 (0,0425) = 8.500

Jadi, besarnya deposit yang harus disimpan sebesar $ 8.500 per tahun.

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Carilah besarnya bunga dari sebuah modal Rp100.000,- dengan bunga biasa 18% yang dijalankan selama 5 tahun.
2. Pokok pinjaman Rp1.000.000,- dijalankan selama 3 tahun dengan bunga majemuk 15%. Berapa uang yang diterima pada akhir tahun ke-5.
3. Soehartino akan mendapatkan uang warisan Rp 100 juta yang baru dapat diperoleh setelah 3 tahun. Jika ia ingin memperoleh warisan sekarang ini, berapa yang diterima jika tingkat bunga mencapai 12%.
4. Berapa tahunkah harus dibungamajemukkan modal awal menjadi 2 kali lipat dengan suku bunga 10% per tahun.
5. Hitunglah harga akhir modal Rp50.000,- yang dibungamajemukkan selama 4 tahun 4 bulan dengan tingkat suku bunga sebesar 12%.
6. Modal awal Rp100.000,- dan akan dikembalikan menjadi Rp 144.290,-pada akhir tahun ke-3. Berapakah tingkat suku bunga per tahunnya.
7. Tentukan suku bunga efektif tahunan (i) jika diketahui tingkat suku bunga nominalnya sebesar 19% per tahun. (a). Secara setengah tahunan dan secara kontinu.
8. Jika pokok pinjaman sebesar 100 ribu rupiah yang dimajemukkan setengah tahunan dengan suku bunga 10% per tahun selama 5 tahun dengan fungsi eksponensial dan fungsi eksponensial natural.
9. Volume penjualan untuk tahun pertama V_1 = 10.000 unit dan V, = 15.000 unit. Jika tingkat pertumbuhan penjualan mengikuti pola eksponensial, hitunglah tingkat pertumbuhan kontinu tahunan dan pertumbuhan diskrit tahunan.
10. Berapa uang si A sesudah 5 tahun jika permulaan tiap-tiap tahun sebesar Rp1.000.000,- disimpan di bank yang memberikan dasar bunga sebesar 16% per tahun.
11. Uang pinjaman Rp500.000,- memberi bunga sebesar 12% setahun dan akan dilunasi dengan 10 anuitet. Berapa besar anuitetnya.
12. Berapa besar pinjaman yang dilanasi dengan anuitet selama 8 tahun, apabila diketahui dasar bunga 15% per tahun dan anuitetnya sebesar Rp22.285,-.
13. Pinjaman pokok Rp500.000,- dengan cicilan per tahun sebesar Rp93.900,- dengan dasar bunga 17% per tahun. Dalam berapa tahun pinjaman akan habis diangsur?

14. Berapa jumlah uang yang disimpan sesudah 6 tahun permulaan tiap-tiap tahun sebesar Rp500.000 disimpan di bank yang memberikan dasar bunga sebesar 13% per tahun.
15. Hitunglah uang yang diterima, jika pokok pinjaman Rp3.500.000,- yang dimajemukkan sepertiga tahunan dengan bunga 14% per tahun selama 3 tahun menurut: (a) fungsi eksponensial dan (b) fungsi eksponensial natural.
16. Seorang investor akan melakukan investasi pada suatu proyek. Diperkirakan umar proyek 10 tahun. Jumlah pendapatan (manfaat) dan biaya disajikan pada tabel di bawah ini b

Tahun	Biaya (Rp)	Manfaat/Benefit (Rp)
1	100.000.000	0
2	10.000.000	40.000.000
3	15.000.000	45.000.000
4	10.000.000	40.000.000
5	15.000.000	45.000.000
6	10.000.000	40.000.000
7	15.000.000	45.000.000
8	10.000.000	40.000.000
9	15.000.000	45.000.000
10	10.000.000	45.000.000

Jika digunakan tingkat suku bunga diskonto 15%, hitunglah: (a) NPV, IRR dan Net B/C dari proyek tersebut dan (b) Berikan analisis apakah proyek tersebut layak diteruskan atau tidak.

17. Harga-harga investasi awal sama (seperti soal 16), hitunglah Gross B/C ratio dan Profitability Indeks (PI)nya.
18. Seorang pengusaha akan melakukan investasi pada suatu proyek hipotetis yang diperkirakan umur proyek 5 tahun. Daftar berikut memberikan parameter sehubungan dengan masing-masing data yang disajikan pada tabel di bawah ini :

Tahun	Biaya (Rp)	Benefit (Rp)
1	6.000.000.000	0
2	1.000.000.000	2.000.000.000

3	1.000.000.000	4.000.000.000
4	1.000.000.000	6.000.000.000
5	1.000.000.000	9.000.000.000

Hitunglah indeks investasi yang diasumsikan pada tingkat suku bunga diskonto sebesar 5% yaitu: a). NPV, IRR. Net B/C, Gross B/C ratio dan PI proyek tersebut dan b). Berikan analisis apakah proyek tersebut layak diteruskan atau tidak.

19. Daftar berikut ini memberikan tingkat NPV (jutaan rupiah) untuk masing-masing proyek pada berbagai tingkat discount rate yaitu :

Discount rate	NPV proyek A	NPV proyek B
0	500	600
5%	450	500
10%	400	400
15%	350	300
20%	300	200
25%	250	100
30%	200	0
35%	150	negatif
40%	100	negatif
45%	50	negatif
50%	0	negatif

Ditanyakan:

a. Hitunglah indeks IRR untuk masing-masing proyek
b. Pada tingkat discount rate berapakah dari kedua proyek tersebut betul-betul sama.
c. Jika seandainya social opportunity cost of capital (SOCC) dianggap sebesar 12% atau 15%, maka proyek manakah akan dipilih?
d. Bagaimana jika SOCC sebesar 9%, proyek manakah yang lebih menguntungkan?

20. Sebuah mesin pabrik batako dibeli dengan harga Rp. 10.000.000. Jika umur pakai 10 tahun dengan nilai bekas diperkirakan sebesar Rp.1.000.000,- hitunglah nilai buku untuk tahun ke-5 dan tahun ke-11 dengan menggunakan metode:
    a. Depresiasi garis lurus (straight-line depreciation).
    b. Depresiasi jumlah bilangan tahun (SOYD).
    c. Depresiasi neraca menurun (*declining balance depreciation*)
    d. Depresiasi cara anuitet.
21. Sebuah mesin untuk pemintalan benang dibeli dengan harga sebesar Rp. 2 milyar, Jika umur pakai mesin 20 tahun dengan nilai bekas diperkirakan Rp. 100 juta, ditanyakan berapa nilai buku pada tahun ke-5, tahun ke-10 dan tahun ke-21 dengan menggunakan metode seperti pada soal-20.

BAB V
FUNGSI, FUNGSI KOMPOSISI DAN FUNGSI INVERS

5.1 REPRESENTASI FUNGSI

Dalam hal khusus dari suatu relasi, dimana untuk setiap x atau beberapa x dipetakan dengan satu atau beberapa y disebut suatu *fungsi*. Bila f merupakan suatu fungsi, daerah asal (domain) fungsi f didefinisikan sebagai himpunan keseluruhan unsur pertama semua pasangan yang ada di dalam f (*independent variable*), sedangkan daerah hasil (*range*) fungsi f didefinisikan sebagai himpunan keseluruhan unsur kedua semua pasangan terurut yang ada di dalam f (*dependent variable*).

Jika f suatu fungsi dan (x,y) e f, maka dapat dituliskan sebagai y = f(x). Bentuk f(x) dinamakan nilai fungsi f di x yaitu fungsi yang menghubungkan x terhadap y atau $f{:}x \rightarrow y$.

Dari uraian di atas dapat dijelaskan kembali bahwa suatu fungsi adalah suatu relasi yaitu suatu sub himpunan dari pasangan berurutan yang mengikuti sifat/ciri yaitu untuk setiap x mempunyai satu *unique* y. Beberapa konsep yang menyangkut fungsi dengan daerah domain dan daerah range:

5. Monoton naik jika $x_1 < x_2 \rightarrow f(x) < f(x_2)$

   Misalkan $f(x) = x^2$, xe (0,3) adalah fungsi monoton naik, sebab untuk $x_1 < x;$ berlaku $f(x_1) < f(x_2)$

6. Monoton turun jika $X_2 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

   Misalkan $f(x) = -x^2$, x = [0,3] adalah fungsi monoton turun, sebab untuk $x_1 > x_2$ berlaku $f(x_1) > f(x_2)$

7. Monoton tidak naik jika $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

   Misalkan f(x)= x. $\in$ [-1,0] adalah fungsi monoton tidak naik, sebab untuk $x_1 < x_2$ berlaku $f(x_1) \geq f(x_2)$.

8. Monoton tidak turun jika $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

   Misalkan $f(x) = x^2$. x $\in$ [10,3] adalah fungsi monoton tidak turun, sebab untuk $x_1 < x_2$ berlaku $f(x_1) \leq f(x_2)$.

9. Monoton bagian demi bagian, misalkan fx-Xe (-3,0) adalah

10. Fungsi f(x) = x^2, -a < x < a adalah fungsi genap, karena [-a,a], adalah kumpulan simetris dan f(-x) = f(x) untuk setiap x∈ (-aa). Fungsi f(x) = x^3, -a < x < a adalah fungsi ganjil, karena (-aa) adalah kumpulan simetris dan f(-x) – f(x) untuk setiap x.∈ [-aa]. Untuk selanjutnya pembahasan pada bab ini akan dibatasi pada hubungan yang berupa suatu fungsi.

Contoh 1. Fungsi f = [(x,y) y = 2x + 3) atau disingkat f(x) = 2x + 3, memetakan bilangan nyata x ke bilangan nyata y yang nilainya sama dengan 2x + 3. Misalkan:

Pada x = 1, dipetakan ke fungsi 2(1) + 3 = 5 ditulis f(1) = 5

Pada x = 2, dipetakan ke fungsi 2(2) + 3 = 7 ditulis f(2) = 7

Pada x = 3, dipetakan ke fungsi 2(3) + 3 = 9 ditulis f(3) = 9

Jadi, 2x + 3 merupakan aturan pemetaannya.

Dalam kenyataan, banyak fungsi mempunyai aturan pemetaan yang berbeda untuk interval-interval yang berlainan seperti contoh berikut:

Contoh 2. Hitunglah f(-2), f(0) dan f(2) jika diketahui,

$$f(x) = \left[\begin{array}{ll} 3\mathrm{x} + 2, & \mathrm{untuk\ x} < 1 \\ 8 & \mathrm{untuk} - 1 \leq \mathrm{x} \leq 1 \\ 3\mathrm{x} + 5, & \mathrm{untuk\ x} < 1 \end{array}\right.$$

Pada f(-2), karena -2 < -1, maka aturan pemetaannya f(-2) = 3(-2) + 2 = -4

Pada (0), karena -1 ≤ x ≤ 1, maka aturan pemetaannya f(2) = 8

Pada (2), karena 2 > 1, maka aturan pemetaannya f(2) = 3(2) + 5

5.2 FUNGSI KOMPOSISI

Jika diberikan bentuk f : y = f(x) dan g : y = g(x) keduanya merupakan suatu fungsi, maka operasi penjumlahan, selisih, hasil kali dan hasil bagi fungsi f dan g, berturut-turut didefinisikan sebagai berikut:

a. (f + g)(x) = f(x) + g(x)
b. (f – g)(x) = f(x) – g(x)
c. (f x g)(x) = f(x) x g(x)
d. (f + g)(x) = f(x) + g(x), dan g(x) ≠ 0

Contoh 3. Diberikan suatu fungsi f : f(x) = $2x^2 – 3x + 1$ dan g : g(x) = 2x – 1, maka operasi aljabar fungsi dapat diberikan yaitu,

(f + g)(x) = f(x) + g(x) = $(2x^2 – 3x + 1) + (2x – 1) = 2x^2 – x$

(f – g)(x) = f(x) – g(x) = $(2x^2 – 3x + 1) – (2x – 1) = 2x^2 – 5x + 2$

(f x g)(x) = f(x) x g(x) = $(2x^2 – 3x + 1)(2x – 1) = 4x^3 – 8x^2 + 5x – 1$

(f + g)(x) = f(x) + g(x) = $(2x^2 – 3x + 1)/(2x – 1) = x – 1$

Misalkan f dan g adalah fungsi sembarang, maka fungsi komposisi atau fungsi majemuk f dan g, dinotasikan g ^{o} f didefinisikan sebagai:

$$(g \,^o f)(x) = g(f(x)) \qquad 6\text{-}1$$

Penjelasan dari rumus 6-1 di atas dapat diterangkan yaitu, mula-mula unsur x dipetakan oleh fungsi f ke bayangan f(x). Kemudian f(x) dipetakan oleh fungsi g ke g(f(x)). Pemetaan berantai ini baru dapat dilakukan bila bayangan x pada pemetaan f(x) berada pada daerah asal fungsi g.

Contoh 4. Diberikan suatu fings fx) $4x^2$ ditentukan untuk masing-masing keadaan yaitu:

1. (g = f2) = g[n(2)]
   = g[$4(2)^2 – 6$] = g(16 – 6)
   = g(10)
   = 3(10) = 30

   dengan cara lain: (g + f)((2) = g[f(x)]
   = g($4x^2 – 6$) = 3($4x^2 – 6$)
   = $12x^2 – 18$
   = $12(2)^2 – 18$
   = 12(4) – 18 = 30

2. (f-8X2) = f[g(2)]
   = f[3(2)] = f(6) = $4(6)^2 – 6$
   = 144 – 6 = 138

   dengan cara lain: (f = g)(2) = f[g(x)]
   = f(2x) = $4(3x)^2 – 6$
   = $36x^2 – 6 = 36(2)^2 – 6$
   = 144 – 6 = 138

Dari soal di atas dapat ditunjukkan bahwa pemajemukan dan fungsi tidak bersifat komutatif (g o f) $\neq$ (f o g), akan tetapi pemajemukan suatu fungsi akan bersifat asosiatif. Dengan demikian tiga atau lebih fungsi akan mengikuti kaidah asosiatif: (f o g) o h = f o (g o h).

Contoh 5. Pada contoh-4, diberikan $h(x) = x^2$, hitunglah masing-masing fungsi majemuk berikut: a. (f o g o h) dan b. (g o f o h)

1. f o g o h	= f o (g o h) atau f o g o h	= (f o g) o h
	= f o $[g(x^2)]$	= (f o g)(x^2)
	= $f[3(x^2)]$	= (f o g)(x^2)
	= $4[3(x^2)]^2 - 6$	= $36(x^2)^2 - 6$
	= $36x^4 - 6$	

113

2 gefeh go(f. h) atau gof.h =(g*)*h

*g+(f(x))

-g$[4(x^2)^3$-6)

-3$[4(x^2)^2$-6]

= $12x^1$-18

*(x-xx)

*$12x^1$-18

5.3 JENIS-JENIS FUNGSI

Fungsi dapat digolong-golongkan menjadi beberapa jenis, tergantung dari bentuk fungsi yang direpresentasikan. Adapun jenis-jenis fungsi antara lain:

5.3.1 Fungsi Polinomial

Fungsi polinomial merupakan fungsi yang mengandung banyak saku (polinomial) pada variabel bebasnya. Pangkat tertinggi pada variabel bebas suatu fungsi polinomial mencerminkan derajat kepolinomialnya, sekaligus juga mencerminkan derajat dari fungsi tersebut. Secara matematis, bentuk umum dari fungsi polinomial adalah:

$$y = ax^2 + ax^{n-1} + + a_2\, x^{n-2} + \ldots\ldots.. + a_{n-1}\, x + a_n \qquad 6\text{-}2$$

dengan n bilangan bulat tak negatif dan a_o, a_1, a_2, ….., a_n konstanta.

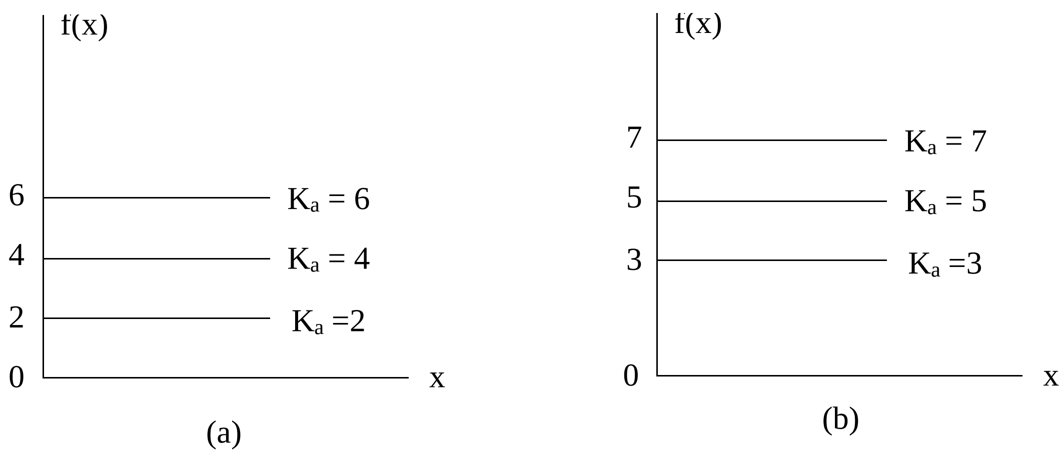
Mengingat fungsi linear dan fungsi kuadrat sangat lazim diterapkan dalam ilmu ekonomi – banyak persoalan mikro dan makro yang diterjemahkan ke dalam bentuk fungsi linear, fungsi kuadratik maupun fungsi kubik-maka pembahasan fungsi polinomial ini dibatasi pada fungsi kubik (ordo tiga) saja. Sedangkan untuk fungsi polinomial yang berderajat lebih dari tiga, akan kita manfaatkan sesuai kebutuhan.

Beberapa "anak kandung" dari fungsi polinomial ini dapat dirunut dengan melihat pangkat tertinggi variabel bebasnya, misalnya:

5.3.1.1 Fungsi Konstan

Suatu fungsi polinomial dimana pangkar variabel bebasnya sama dengan nol. Bentuk umum dari fungsi konstan yaitu y = f(x) = k (k, konstanta riil). Bentuk grafik fungsi konstan ini merupakan garis lurus yang sejajar dengan sumbu-X.

Contoh 6. Gambarkan fungsi konstan f(x) = k dengan masing-masing harga yaitu: (a). $k_1 = 2$, $k_2 = 4$, $k_3 = 6$ dan (b). $k_1 = 3$, $k_2 =5$, $k_1 = 7$.



Gambar 5.1 Fungsi Konstan

5.3.1.2 Fungsi Linear

Suatu fungsi polinomial dimana pangkat variabel bebasnya sama dengan satu (fungsi garis lurus berordo satu). Bentuk umum dari fungsi linear ini adalah y = f(x) = ax + b, dimana bentuk grafik fungsinya merupakan suatu garis lurus dengan gradien (tangen α = a).

Beberapa rumus penting yang berkaitan dengan fungsi linear dapat dirangkum sebagai berikut:

1. persamaan umum: $y = ax + b$
2. $y – y_1 = a(x – x_1)$
3. $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \rightarrow a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (gradien)
4. Jika dua garis sejajar: $g_1//g_2$, maka $a_1 = 82$
5. Jika dua garis tegak harus: $g_1 \perp g_2$, maka $a_1 \cdot a_2 = -1$

Contoh 7. Carilah bentuk persamaan garis lurus yang melalui titik A (5,8) dan B (-1, -4).

Pers. umum: $y = ax + b \rightarrow$ $8 = 5a + b$

$\underline{-4 = -1a + b}$ –

$12 = 6a$ diperoleh $a = 12/6 = 2$

Pada $a = 2$, maka $8 = 5(2) + b$ diperoleh $= 8 – 10$, sehingga $b = -2$

Jadi, persamaan garis lurus $y = 2x – 2$

Dapat juga dicari dengan: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \rightarrow a = \frac{y-8}{-4-8} = \frac{x-5}{-1-5}$

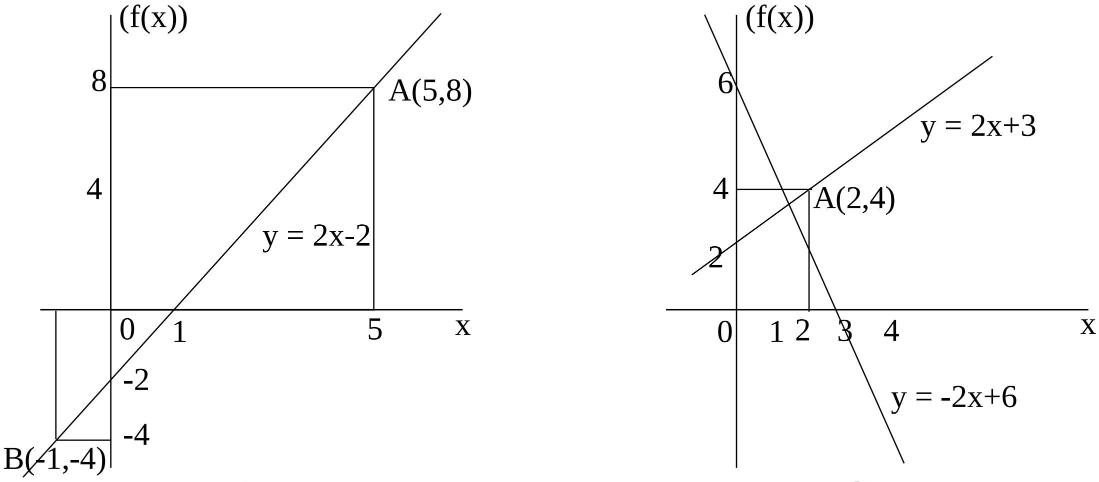
Sehingga: $-6(y – 8) = -12(x – 5)$

$(y – 8) = 2(x – 5)$

$y = 2(x – 5) + 8$

$= 2x – 10 + 8$

Jadi, persamaan garis lurus $y = 2x – 2$ (Gambar 6.2a)



(a) (b)

Gambar 5.2 Fungsi Linear

Contoh 8. Carilah persamaan garis lurus melalui titik A (2,4) dan berpotongan tegak lurus dengan persamaan garis y = -2x + 6.

Garis $g_1 \perp g_2 \rightarrow a_1 . a_2 - 1$, maka $a_2 = -1/(-2) = ½$

$y = a_2 x + b \rightarrow 4 = ½(2) + b$

$4 = 1 + b \rightarrow b = 3$

Jadi, persamaan garis lurus y = ½x + 3 (Gambar 6.2b)

5.3.1.3 Fungsi Kuadrat

Suatu fungsi polinomial dimana pangkat variabel bebasnya sama dengan dua (fungsi berordo dua). Bentuk umum dari fungsi kuadrat ini adalah $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, untuk $a \neq 0$.

Bentuk fungsi kuadrat dapat diuraikan menjadi:

$$ax^2 + bx + c = a(x + b/2a)^2 + [\frac{b^2 - 4ac}{-4a}]$$

$$= a(x + b/2a)^2 + \frac{D}{-4a} \qquad 6-3$$

Grafik fungsi kuadrat dapat dibuat dengan mengambil beberapa ciri matematis yang sangat penting yaitu:

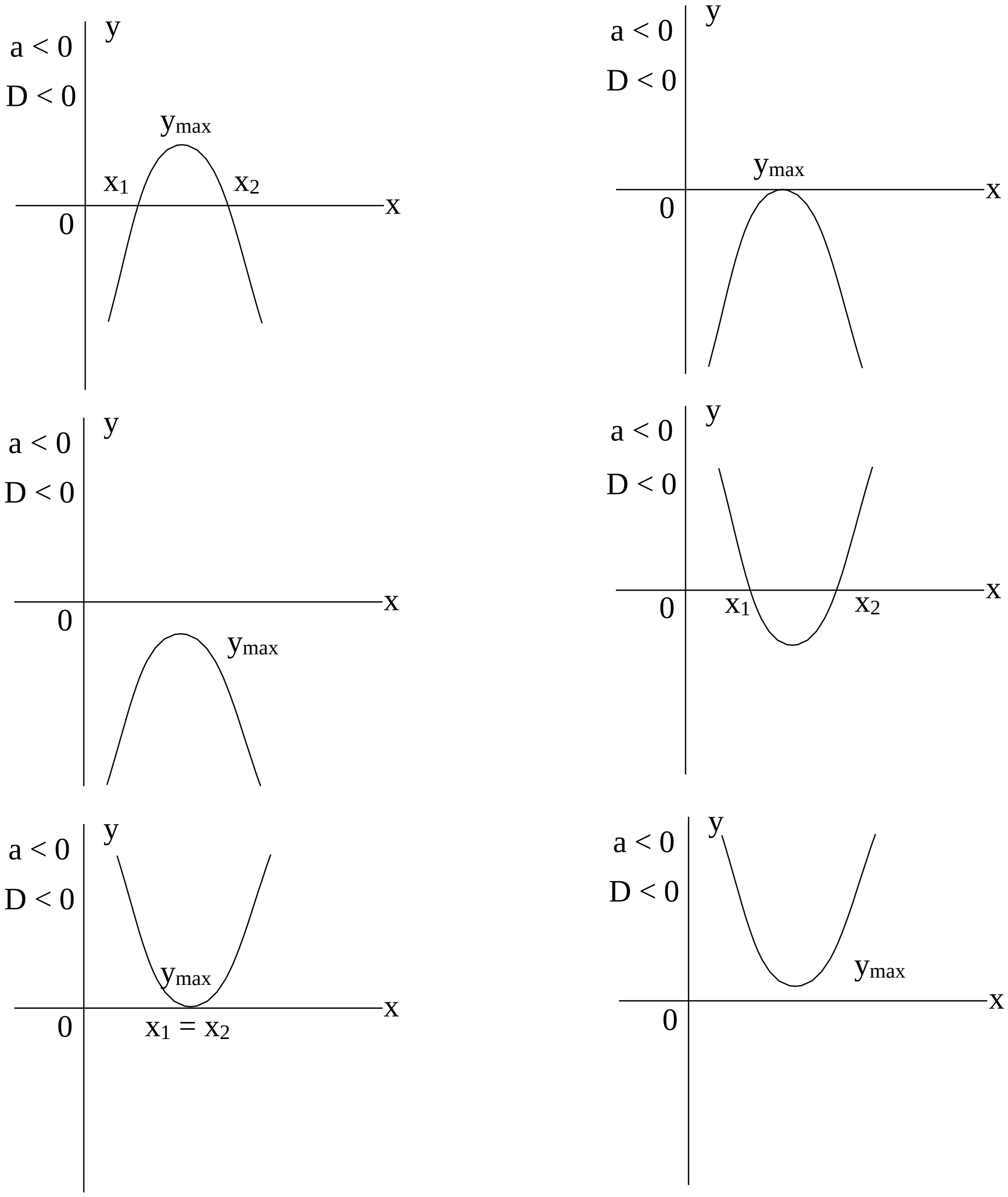
1. Titik potong dengan sumbu y adalah pada x = 0 yaitu (0,c).
2. Titik potong dengan sumbu x adalah pada y = 0 yang memiliki 3 kemungkinan yaitu:
   a. Bila diskriminan $D = b^2 - 4ac > 0$, akan terdapat dua titik potong pada sumbu x:

   $$[x_1 \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}, 0] \text{ dan } [x_2 \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}, 0] \qquad 6-4$$

   b. Bila diskriminan $D = b^2 - 4ac = 0$, hanya terdapat satu buat titik potong.

   $$(x_{1,2} = \frac{-b}{2a}, 0)$$

   c. Bila diskriminan $D = b^2 - 4ac < 0$, tidak terdapat titik potong.



Gambar 5.3 Bentuk-bentuk Fungsi Kuadrat y = ax² + bx + c

3. Titik puncak/ekstrim terdapat pada titik (x,y) dengan:

$$x = \frac{-b}{2a} \text{ dan } y = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \qquad 6 - 6$$

   Jika a>0→Grafiknya cembung ke atas (minimum)

   Jika a <0-Grafiknya cekung ke bawah (maksimum)

Contoh 9. Hitunglah fungsi-fungsi berikut ini:

a. Fungsi: $y = x^2 - 2x + 1$ gambar sketsa fungsi tersebut.
   1. Titik potong dengan sumbu y adalah pada x = 0 yaitu (0,1).

2. Titik potong dengan sumbu x adalah pada y = 0:

   Diskriminan D = b - 4ac 2-4(1x1) = 0, hanya satu titik potong pada sumbu x:

   $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{(2^2 - 4(1)(1))}}{2a} = \rightarrow x_{1,2} = 1$$

   Jadi titik potong dengan sumbu-x adalah (1,0)

3. Titik puncak/ekstrim:

   $$y = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\{4 - 4(1)(1)\}}{4(1)} = 0$$

   x = -b/2a = 2/2(1) = 1

   Pada a > 0 titik puncak berada minimum (1,0) (Gambar 6.4a)

b. Fungsi: y = 1-x gambar sketsa fungsi tersebut.

1. Titik potong dengan sumbu y adalah pada x = 0 yaitu (0,1).
2. Titik potong dengan sumbu x adalah pada y = 0:

   Diskriminan D = b^2 – 4ac = 0 – 4(-1)(1) = 4 > 0, ada dua titik potong pada sumbu x:

   $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{(0 - 4(-1)(1))}}{2(-1)} \rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

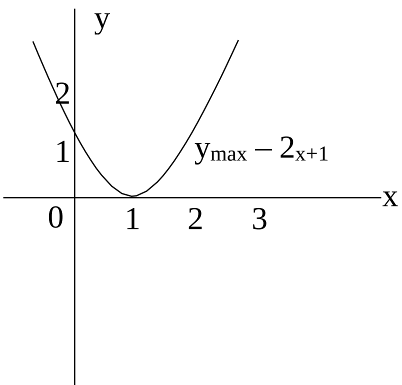
   Titik potong dengan sumbu x adalah (1,0) dan (-1,0).

3. Titik puncak/ekstrim:

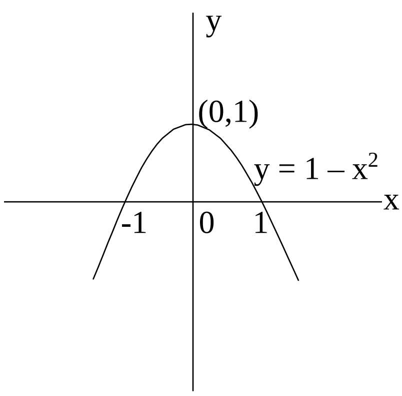
   $$y = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\{0 - 4(-1)(1)\}}{4(-1)} = 1$$

   x = -b / 2a = 0/2(-1) = 0

   pada a < titik puncak berada maksimum (0,1) (Gambar 6,4b)



(a)



(b)

Gambar 5.4 Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadratik dapat juga berbentuk $x = f(y) = ay^2 + by + c$. Fungsi ini dapat digambarkan pada suatu bidang datar yang berdimensi dua dengan menetapkan sumbu horizontal sebagai sumbu x dan sumbu vertikal sebagai sumbu y.

Grafik fungsi tersebut dapat digambarkan seperti halnya pada fungsi kuadrat dengan x sebagai variabel bebas. Beberapa ciri matematis yang penting dari fungsi ini adalah:

1. Titik potong dengan sumbu x adalah pada y = 0 yaitu (c, 0).
2. Titik potong dengan sumbu y adalah pada x = 0 yang memiliki 3 kemungkinan yaitu:
   a. Bila diskriminan $D = b^2 - 4ac > 0$, akan terdapat dua titik potong pada sumbu y:
   $$[0, y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}] \text{ dan } [0, y_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}] \qquad 6-7$$
   b. Bila diskriminan $D = b^2 - 4ac = 0$, hanya terdapat satu buat titik potong.
   $$[0, y_{1,2} = \frac{-b}{2a}] \qquad 6-8$$
   c. Bila diskriminan $D = b^2 - 4ac < 0$, tidak tedapat titik potong.
3. Titik puncak/ekstrim terdapat pada titik (x,y) dengan:
   $$[x = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}] \text{ dan } y = \frac{-b}{2a} \qquad 6-9$$

Contoh 10. Fungsi $x = f(y) = 9 - y^2$.

1. Titik potong dengan sumbu x adalah pada y = 0 yaitu (9,0),
2. Titik potong dengan sumbu y adalah pada x = 0;
   Diskriminan $D = b^2 - 4ac = 0 - 4(-1)(9) = 36 > 0$, terdapat dua titik potong pada sumbu y:
   $$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{4a} = \frac{0 \pm \sqrt{(0 - 4(-1)(9))}}{2(-1)} = \frac{\pm\sqrt{36}}{-2} = \frac{\pm 6}{-2} \rightarrow$$
   $y_1 = 3$ dan $y_2 = -3$
   Jadi titik potong dengan sumbu-y adalah (0,3) dan (0, -3)
3. Titik puncak/ekstrim:
   $$x = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\{0 - 4(-1)(9)\}}{4(-1)} = \frac{-36}{-4} = 9$$

y = -b/2a = 0/2(-1)=0

Pada a < 0 puncak berada maksimum (9,0) (Gambar 6.5a)

Contoh 11. Fungsi x = f(y) = y^2

1. Titik potong dengan sumbu x adalah pada y = 0 yaitu (0,0).
2. Titik potong dengan sumbu y adalah pada x = 0

   Diskonto D = b^2 – 4ac = 0 – 4 (1)(0) = 0, terdapat satu titik potong dengan sumbu y.

   $$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}}{4a} = \frac{0 \pm \sqrt{(0-4(-1)(9))}}{2(-1)} = \frac{\pm\sqrt{36}}{-2} = \frac{\pm 6}{-2} \rightarrow$$

   y_1 = 3 dan y_2 = -3

   Jadi titik potong dengan sumbu-y adalah (0,3) dan (0,-3)
3. Titik puncak/ekstrim:

   $$x = \frac{-(b^2-4ac)}{4a} = \frac{-\{(0-4)(-1)(9)\}}{4(-1)} = \frac{-36}{-4} = 9$$

   y = -b/2a = 0/2 (-1) = 0

   Pada a < 0 titik puncak berada maksimum (9,0) (Gambar 6.5a)

Contoh 11. Fungsi x = f (y) = y^2

1. Titik potong dengan sumbu x adalah pada y = 0 yaitu (0,0).
2. Titik potong dengan sumbu y adalah pada x = 0;

   Diskriminan D = b^2 – 4ac = 0 – 4(1)(0) = 0, terdapat satu titik potong dengan sumbu y:

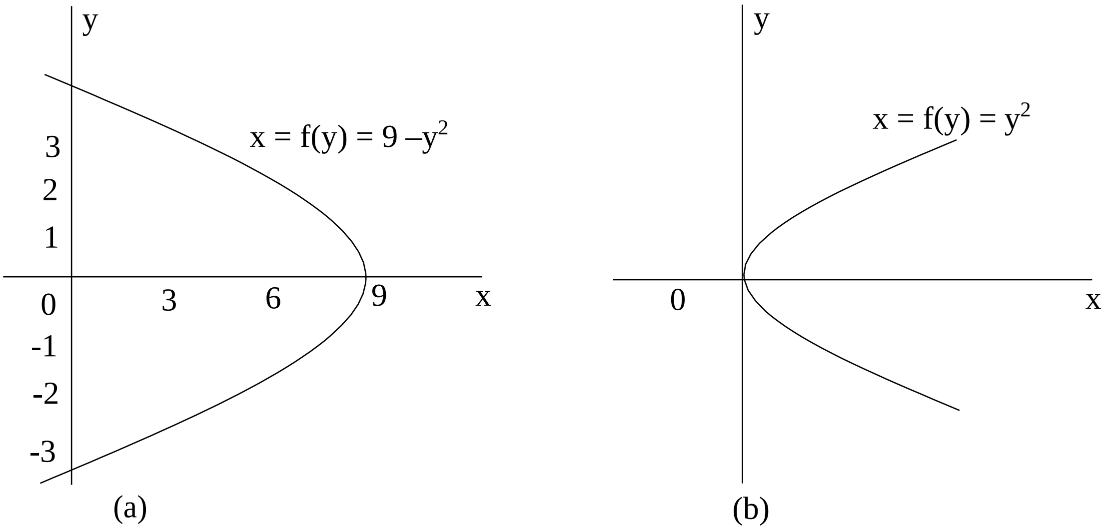
   $$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{(0-4(-1)(0))}}{2(1)} = y_1 = y_2 = 0$$

   Jadi titik potong dengan sumbu –y adalah (0,0)
3. Titik potong/ekstrim:

   $$y = \frac{(b^2-4ac)}{4a} = \frac{-(0-4(1)(0))}{4(1)} = 0$$

   x = -b/2a = 0/2(-1) = 0

   Pada a > titik puncak berada minimum (0,0) (Gambar 6.5b)



Gambar 5.5 Fungsi Kuadrat x = f(y)

5.3.1.3 Fungsi Kubik

Suatu fungsi polinomial dimana pangkat variabel bebasnya sama dengan tiga disebut fungsi kubik. Bentuk umum dan fungsi kubik ini adalah y = f(x) = ax + bx + c + d, untuk $a \neq 0$.

Fungsi kubik dalam bentuk persamaan di atas umumnyai mempunyai titik maksimum, titik minimum serta titik belok (*inflexion point*). Bentuk kurva fungsi ini akan memotong sumbu vertikal pada ordinat y = d untuk nilai x = 0. Namun demikian tidak semua fungsi kubik ini mempunyai titik ekstrim, ada yang hanya mempunyai sebuah titik belok saja. Hal ini bergantung pada paramater-parameter persamaan fungsi tersebut.

Pelukisan grafik fungsi kubik dapat dilakukan dengan cara yang sederhana yaitu dengan menggunakan tabel x dan y yang disebut *curva tracing process*. Kita tentukan terlebih dahulu nilai x sebagai variabel bebas, kemudian dengan memasukkan nilai x tersebut ke dalam fungsi kubik, maka akan diperoleh besarnya variabel y sebagai variabel yang dipengaruhi/tidak bebas.

Contoh 12. Sketsa grafik fungsi kubik berikut ini:

a. $y = f(x) = -2x^3 + 9x^2 – 12x + 5$

b. $y = f(x) = x^3 + 1$

c. $y = f(x) = x^2$

d. $y = f(x) = x^2 - 6x^2 + 9x$

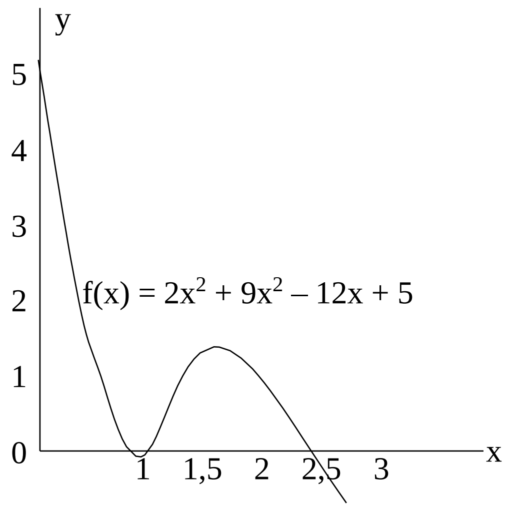
Dengan menggunakan tabel x dan y yaitu *curva tracing process* diperoleh sketsa grafik fungsi kubik (Gambar 6.6).

5.3.2 Fungsi Tangga

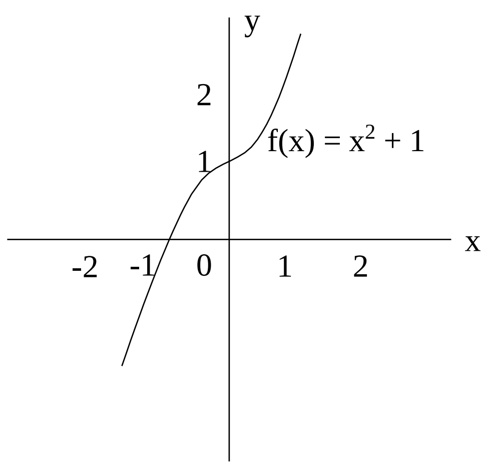
Fungsi tangga umumnya dinyatakan dalam bentuk f(x) = [x] yang didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil stan sama dengan x (Gambar 6.7).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	5	1	0	0,5	1	0	-4

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	-16	0	4	2	0	4	20



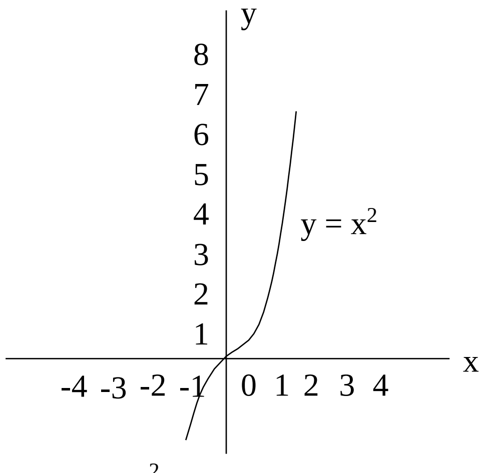
a. $y = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5$



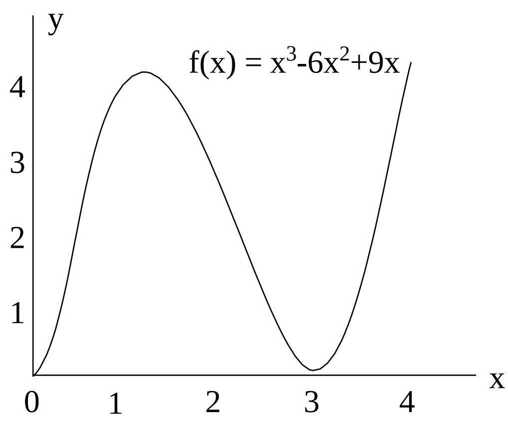
b. $y = x^2 + 1$

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	5	1	0	0,5	1	0	-4

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	-16	0	4	2	0	4	20



c. $y = x^2$

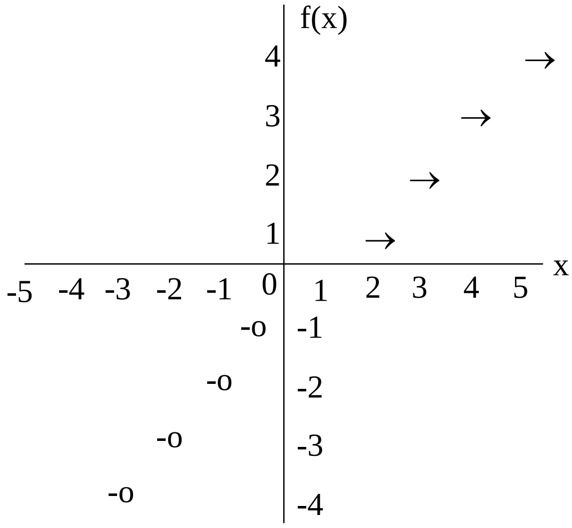


d. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

Gambar 5.6 Sketsa Grafik Fungsi Kubik

Contoh 13. Fungsi tangga f(x) = [x] untuk interval -3,5 ≤ x ≤ 4 dapat digambarkan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} -4, \text{untuk} -3{,}5 \le x \le -3 \\ -3, \text{ untuk } -3 \le x \le -2 \\ -2, \text{ untuk} -2 \le x \le -1 \\ -1, \text{untuk} -1 \le x \le 0 \\ 0, \text{untuk } 1 \le x \le 1 \\ 1, \text{untuk } 1 \le x \le 2 \\ 2, \text{untuk } 1 \le x \le 3 \\ 3, \text{untuk } 1 \le x \le 4 \\ 4, \text{untuk } x = 4 \end{cases}$$



Gambar 5.7 Fungsi Tangga

5.3.3 Fungsi Nilai Mutlak

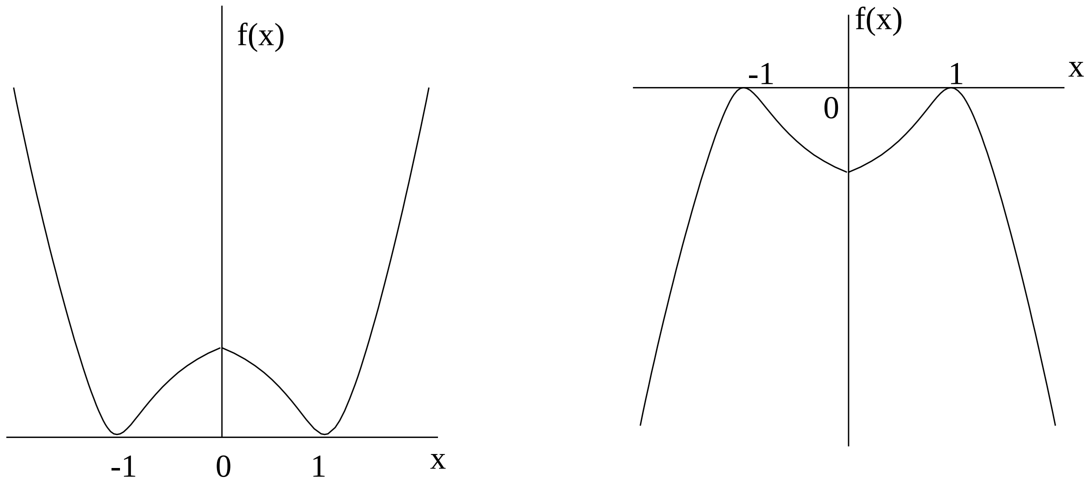
Suatu fungsi nilai mutlak untuk bilangan yang tidak pernah negatif (selalu positif) sehingga dapat dinyatakan bahwa nilai mutlak suatu bilangan positif adalah dirinya sendiri dan nilai mutlak suatu bilangan negatif adalah lawan dirinya sendiri. Dengan demikian grafik fungsi nilai mutlak selalu di atas sumbu-X.

Jika x sembarang biangan nyata maka:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, \text{untuk } x \ge 0 \\ -x, \text{untuk } x < 0 \end{cases}$$

Contoh 14. Fungsi nilai mutlak f(x) = x^2 – 11 dapat digambarkan dengan cara membuat sketsa fungsi (x^2 – 1) dan mencerminkan terhadap sumbu-X bagian grafik yang berada di bawah dengan sumbu-X (Gambar 6.8a).

Contoh 15. Fungsi nilai mutlak $f(x) = -lx^2 - 11$ dapat digambarkan dengan cara membuat sketsa fungsi $(x^2 - 1)$ dan mencerminkan terhadap sumbu-X bagian grafik yang berada di atas dengan sumbu-X. Di sini dapat dilihat ternyata fungsi ini tidak lain merupakan hasil pencerminan dari seluruh grafik (Contoh 14) dengan sumbu-X (Gambar 6-8b).



b. $f(x) = [x^2-1]$

a. $f(x) = [x^2-1]$

Gambar 5.8 Fungsi Nilai Mutlak

5.3.4 Fungsi Rasional Pecah

Fungsi pecah atas fungsi rasional adalah suatu fungsi yang dinyatakan dalam bentuk umum yaitu:

$$f(x) = \frac{P(x)}{q(x)} \text{ dengan } q(x) \neq 0 \qquad 6-10$$

Di mana masing-masing fungsi p(x) dan q(x) merupakan fungsi polinomial serta $q(x) \neq 0$, karena jika q(x) sama dengan nol maka fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan.

Untuk fungsi pecah $y = f(x) = (ax + b)/(px + q)$, grafiknya berupa hiperbola ortogonal dengan astot-asimtotnya adalah $x = -q/p$ dan y a/p.

Contoh 16. Diketahui fungsi pecah $y = f(x) = \frac{1}{x-1}$. Fungsi pecahini dapat digambarkan dengan cara sebagai berikut

1. Asimtot tegak dicari yaitu penyebut sama dengan nol

   $x - 1 = 0$, maka $x = 1$

   Asimtot tegak pada garis $x = 1$

2. Asimtot datar dicari dengan melihat perilaku fungsi:

   Untuk $x \to +\infty$ maka $y = 0$

   Untuk $x \to -\infty$ maka $y = 0$

   Asimtot datar pada garis $y = 0$

3. Mencari titik-titik potong pada sumbu koordinat:

   Sumbu-X: Untuk $y = 0$, $\to$ tidak ada titik potong pada sumbu-X

   Sumbu-Y: Untuk $x = 0$, $\to y = -1$, titik potong (0,-1)

4. Gambar 6.9a.

Contoh 17. Diketahui fungsi pecah $y = f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$

1. Asimtot tegak dicari yaitu penyebut sama dengan nol

   $x - 1 = 0$, maka $x = 1$

   Asimtot tegak pada garis $x = 1$

2. Asimtot datar dicari dengan melihat perilaku fungsi:

   Untuk $x \to +\infty$ maka $y = 2$

   Untuk $x \to -\infty$ maka $y = 2$

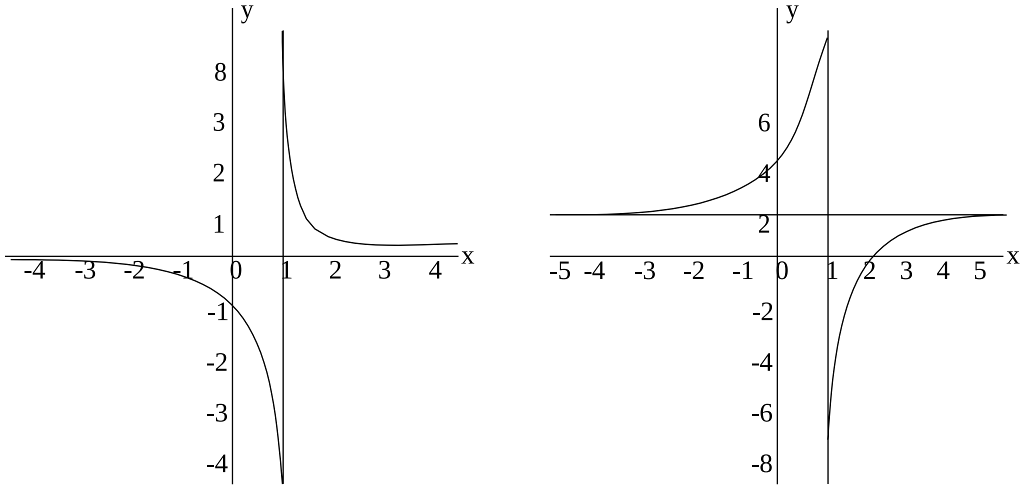
   Asimtot datar pada garis $y = 2$

3. Mencari titik-titik potong pada sumbu koordinat:

   Sumbu-X : Untuk $y = 0$, $\to (2x - 4) = 0 \to x = 2$ titik potong (2.0)

   Sumbu-Y: Untuk $x = 0$, $\to y = 4$, titik potong (0,4)

4. Gambar 6.9b.

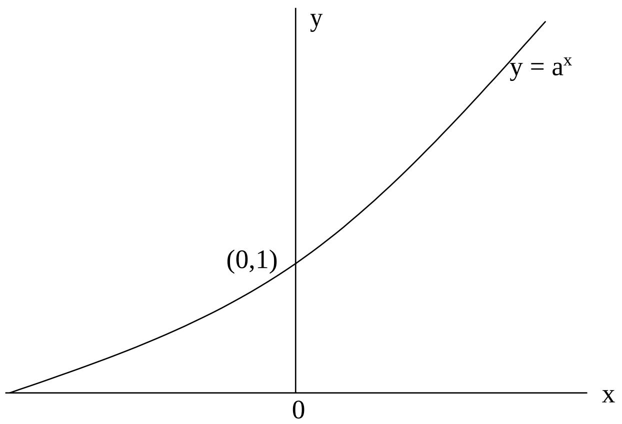


b. $y = \frac{1}{x-1}$ a. $y = \frac{2x-4}{x-1}$

Gambar 5.9 Fungsi Pecah

5.3.5 Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial secara umum dinyatakan dalam bentuk $y = f(x) = a^x$, di mana fungsi tersebut merupakan fungsi naik untuk $a > 1$, fungsi turun untuk $0 < a < 1$ dan menjadi fungsi konstan untuk $a = 1$. Keunikan dari fungsi eksponensial ini adalah grafik fungsinya tidak pernah memotong sumbu x (merupakan asimtot datar) dan perpotongan dengan sumbu y terletak pada titik (0,1).



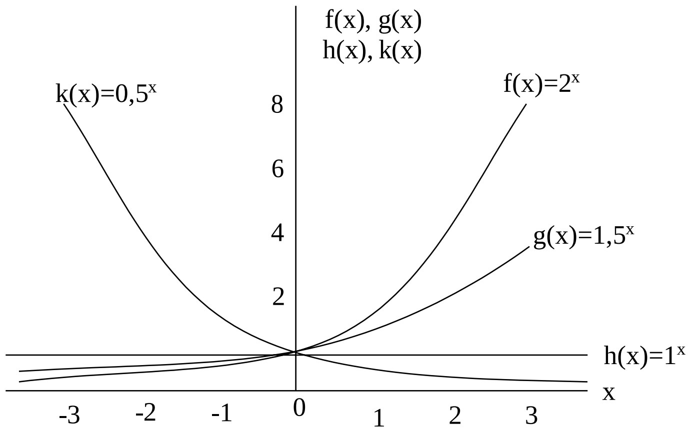
Gambar 5.10 Fungsi Eksponensial

Contoh 18. Gambarkan grafik fungsi-fungsi eksponensial berikut pada sumbu koordinat yang sama.

a) $f(x) = 2^x$ b) $g(x) = 1.5^x$ c) $b(x) = 1^x$ d) $k(x) = 0,5$

Dengan menggunakan tabel x dan y yaitu *curva tracing process* diperoleh sebagai berikut (sebagian nilai dalam tabel ini adalah penghampiran).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	0,13	0,25	0,5	1	2	4	8
g(x)	0,29	0,44	0,66	1	1,5	2,25	3,38
h(x)	1	1	1	1	1	1	1
k(x)	8	4	2	1	0,5	0,25	0,13



Gambar 5.11

5.3.6 Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma, seperti yang telah dijelaskan pada Bab III mempunyai hubungan yang sangat erat dengan fungsi eksponensial. Suatu fungsi eksponensial y = a^a, maka fungsi balikannya adalah y = ${}^a\log$ x. Grafik fungsi balikannya adalah y = ${}^a\log$ x. Grafik fungsi logaritma y = ${}^a\log$ x diperoleh dengan cara mencerminkan grafik fungsi eksponensial y = a^x terhadap garis lurus y = x atau satu sama lain merupakan bayangan cermin dari grafik yang lain terhadap garis y = x.

Di samping keunikan seperti pada fungsi eksponensial, grafik fungsi logaritma (karena merupakan balikan fungsi eksponensial), tidak pernah memotong sumbu-y (merupakan asimtot tegak) dan perpotongan dengan sumbu-x terletak pada titik (1,0).

5.4 FUNGSI INVERS

Suatu fungsi f yang memetakan suatu unsur x ke suatu unsur y, kemudian dapat ditemukan bahwa fungsi g yang memetakan unsur y ke suatu unsur x sehingga g(y) = x, maka g(y) disebut fungsi invers dari f(x). Dengan kata lain, jika $(x,y) \in f$, maka inversnya adalah $(y,x) \in g$. Dari definisi ini jelas, bahwa setiap unsur x yang dipetakan oleh f ke f(x) dan f(x) ini oleh f^{-1} akan dikembalikan ke x. Notasi untuk fungsi invers ditulis sebagai: f^{-1}.

Langkah-langkah yang dapat digunakan untuk mencari suatu balikan/invers suatu fungsi f antara lain:

1. Misalkan fungsi y = f(x)
2. Menyelesaikan persamaan dalam bentuk $x \rightarrow x = f(y)$,
3. Menukarkan x dengan y sehingga diperoleh y = g(x) yang merupakan invers f(x) dan
4. Memeriksa $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$.

Contoh 19. Carilah invers fungsi-fungsi berikut:

a. $f(x) = x^2$ - langkah 1, $y = x^2$

- langkah 2, $x^2 = y \rightarrow x = \sqrt{y}$
- langkah 3, $y = \sqrt{y}$

  Sehingga $g(x) = \sqrt{x}$ invers dari f(x)
- langkah 4, memeriksa fungsi komposisinya

$(g \circ f)(x) = g(x+2) = \sqrt{x^2} = x$

$(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$

$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$, maka fungsi inversnya: $f^i\,(x) = \sqrt{x}$

b. $f(x) = x^2 + 1$ - langkah 1, $y = x^2 + 1$

- langkah 2, $x^2 = y - 1 \rightarrow x = \sqrt{(y-1)}$
- langkah 3, $y = \sqrt{(x-1)}$

  sehingga $g(x) = \sqrt{(x-1)}$ invers dari f(x)
- langkah 4, memeriksa fungsi komposisinya.

$(g \circ f)(x) = g(x^2 + 1) = \sqrt{[(x^2 +) - 1]} = \sqrt{x^2} = x$

$(f \circ g)(x) = f(\sqrt{(x-1)}) = [\sqrt{(x-1)^2 + 1}] = (x - 1) + 1 = x$

$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$, maka fungsi inversnya: $f^i\,(x) = \sqrt{(x-1)}$

c. $f(x) = a^2$ - langkah 1, $y = a^x$

- langkah 2, log y = x log a, $x = {}^a\log y$
- langkah 3, $y = {}^a\log x$

  sehingga $g(x) = {}^a\log x$ invers dari f(x)
- langkah 4, memeriksa fungsi komposisinya:

$(g \circ f)(x) = g(a^x) = {}^a\log (a^x) = \dfrac{\log a^x}{\log a} = \dfrac{x \log a}{\log a} = x$

$(f \circ g)(x) = f[{}^a\log x] = a = x$

$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$, maka fungsi inversnya: $f^i\,(x) = {}^a\log x$

d. $f(x) = e^2$ - langkah 1, $y = e^x$

- langkah 2, In y = x In e $\rightarrow$ x = In y
- langkah 3, y = In x

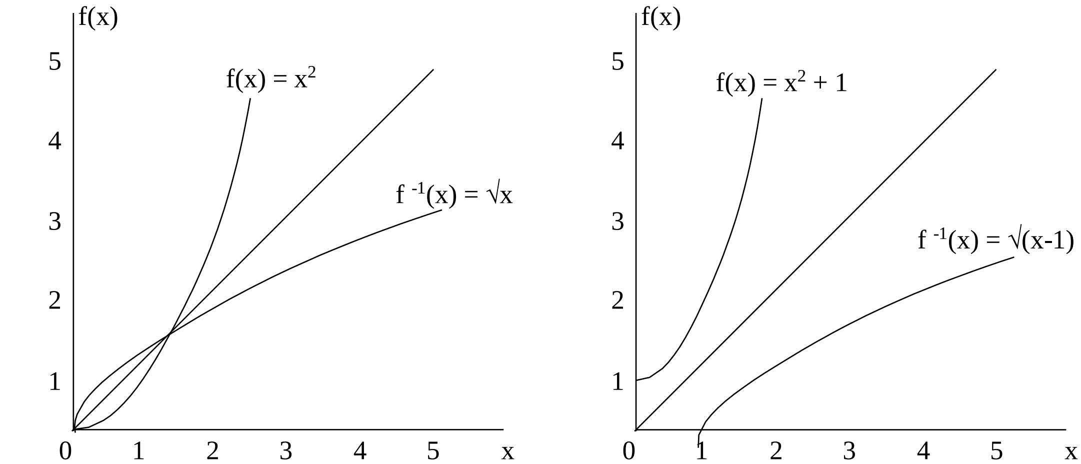
sehingga g(x) = In x invers dari f(x)

- langkah 4, memeriksa fungsi komposisinya:

$(g \circ f)(x) = g(e^x) = \text{In}\,(e^x) = x$

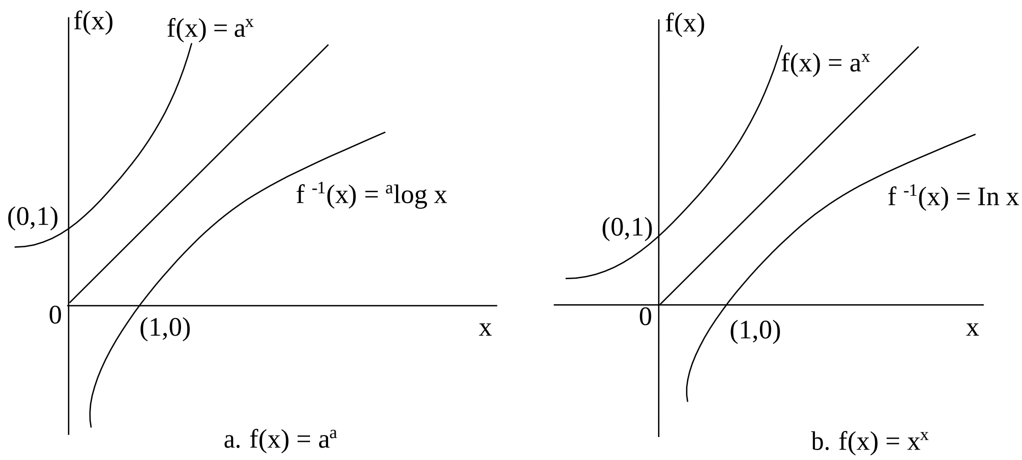
$(f \circ g)(x) = f[\text{In}\,x] = e^{\text{In}\,x} = x$

$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$, maka fungsi inversnya: $f^{-1}\,(x) = \text{In}\,x$



a. f (x) = x^2 b. f(x) = $x^2 + 1$

Gambar 6.13 Fungsi Invers



a. f(x) = a^a b. f(x) = x^x

Gambar 5.14 Fungsi Invers

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Fungsi f: R $\rightarrow$ R ditentukan oleh $f(x) = 3x^2 + x + 6$
   a. Hitunglah f(2) dan f(5)
   b. Jika diketahui f(a) = 36, carilah a.
2. Diberikan fungsi f: $f(x) = 2x + 4$ dan g: $g(x) = x + 1$, hitunglah operasi-operasi aljabar fungsi berikut ini:
   a. $(f + g)(x)$
   b. $(f – g)(x)$
   c. $(f \times g)(x)$
   d. $(f + g)(x)$
3. Diberikan suatu fungsi $f(x) = x^2$. $g(x) = 2x – 2$ dan $h(x) = 2x$, hitunglah fungsi-fungsi komposisi berikut:
   a. $(g \circ f)(-3)$
   b. $(h \circ f)(10)$
   c. $(h \circ g)(3)$
   d. $(g \circ h \circ f)(-1)$
   e. $(h \circ f \circ g)(-4)$
   f. $(g \circ f \circ h)(5)$
4. Carilah persamaan garis lurus melalui titik A (4.2) dan berpotongan tegak lurus dengan persamaan garis $y = 2x - 5$.
5. Tentukan titik potong dari garis $y = 2x + 1$ dan garis $y = 4x – 3$ secara aljabar dan nyatakan pula dengan grafik.
6. Ditentukan titik B(2,4). Untuk harga a yang manakah titik B itu terletak pada garis $y = ax + 7$.
7. Hitunglah harga a supaya kedua persamaan $2x + ay = -3$ dan $x – 3y = -2$ digambar oleh garis yang sejajar.
8. Carilah persamaan garis yang melalui titik P (4,6) dan sejajar dengan garis $y = 3x - 5$.
9. Berapa harga-harga nol dari fungsi $y = x^2 – 2x – 3$ dan harga dari x pada mana harga paling ekstrim dari y dapat dicapai dan gambarkan pula grafiknya.
10. Berapa harga-harga nol dari fungsi $y = x^2 – 6x + 5$ dan harga dari x pada mana harga paling ekstrim dari y dapat dicapai dan gambarkan pula grafiknya.

11. Bentuk $x^2 - ax + 7$ mempunyai harga minimum untuk x = 3. Tentukan harga a dan harga minimumnya.
12. Fungsi pangkat dua manakah yang mempunyai nilai minimum -2 untuk x = 3 dan mempunyai harga 6 untuk x = 1.
13. Hitunglah minimum $x^2 + y^2$, jika $y = 2x - 5$.
14. Sketsa grafik fungsi kubik berikut ini:
    a. $y = f(x) = x^3 - 6x + 12x - 6$ untuk $0 \leq x \leq 3$
    b. $y = f(x) = x^3 - 3x$ untuk $-3 \leq x \leq 5$
    c. $y = f(x) = 2x^3$ untuk $0 \leq x \leq 3$
    d. $y = f(x) = 2x^3 + 3x^3 - 12x - 4$ untuk $0 \leq x \leq 2$
15. Gambarkan grafik fungsi nilai mutlak:
    a. f(x) = kx – I1
    b. f(x) = $-x^2$ + I1
    c. f(x) = 14 - xI
    d. f(x) = -Ix - 6I
    e. f(x) = 1 + IxI
    f. $f(x) = \frac{x}{|x|}$
16. gambarkan fungsi pecah berikut ini:
    a. $f(x) = \frac{1}{x-3}$
    b. $f(x) = \frac{1}{x}$
    c. $f(x) = \frac{2x-8}{x-2}$
    d. $f(x) = \frac{2}{x+6}$
17. Gambarkan grafik fungsi-fungsi eksponensia berikut pada sumber kordinat yang sama.
    a) $f(x) = 3^x$ b) $g(x) = 2^x$ c) $h(x) = 1^x$ d) $k(x) = 1,5^x$
18. Tentukan balikan (invers) dari setiap fungsi eksponen berikut :
    a) $f(x) = 5^x$ b) $f(x) = 4^x$ c) $f(x) = 0,25^x$
    d) $f(x) = 1,5^x$ e) $f(x) = 0,75^x$ f) $f(x) = 1,25^x$

19. Tentukan balikan (invers) dari setiap fungsi logaritma berikut :

a) $f(x) = {}^{5}\log x$	b) $f(x) = {}^{6}\log x$	c) $f(x) = {}^{7}\log x$
d) $f(x) = {}^{0,5}\log x$	e) $f(x) = {}^{1,5}\log x$	f) $f(x) = {}^{3/4}\log x$

20. Gambarkan grafik fungsi eksponen dangrafik balikan fungsi pada sumbu koordinat yang sama serta nyatakan persamaan fungsi balikannya.

    a. $f(x) = 3^x$

    b. $f(x) = 2^x$

    c. $f(x) = 2,5^x$

    d. $f(x) = 4,5^x$

    e. $f(x) = 1,75^x$

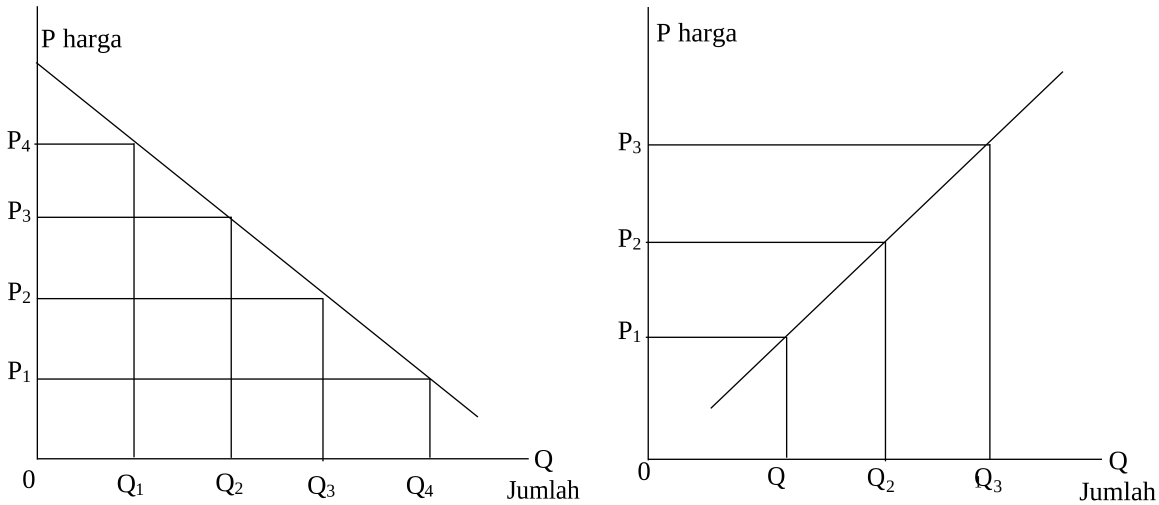
    f. $f(x) = 0,5^x$

BAB VI

APLIKASI FUNGSI DALAM EKONOMI DAN BISNIS

6.1 FUNGSI PERMINTAAN DAN FUNGSI PENAWARAN

Seperti kita ketahui bahwa permintaan masyarakat terhadap suatu produk (barang atau jasa) adalah berbagai jumlah produksi barang atau jasa) yang diminta pada berbagai tingkat harga. Dalam kam permintaan dinyatakan bahwa besar kecilnya jumlah barang yang diminta akan sangat bergantung pada tingkat harga barang tersebut. Gambar 7.1a. menggambarkan karakteristik permintaan masyarakat terhadap barang tertentu yang secara umum memperhatikan bahwa makin tinggi harga suatu barang (P), makin kecil jumlah barang yang diminta (Q) dan sebaliknya bila harga barang turun, maka jumlah anggota masyarakat yang mampu membeli akan bertambah sehingga permintaan akan barang itu pun meningkat.



a. Kurva Permintaan

b. Kurva Penawaran

Gambar 6.1

Kurva permintaan seperti pada Gambar 6.1a. di atas merupakan penjumlahan permintaan permintaan diatas yang ditentukan oleh sistem nilai individu tersebut dan ketersediaan dana pembelanjaannya (*available budget*).

Penawaran akan suatu produk barang atau jasa adalah jumlah produksi (barang atau jasa yang ditawarkan oleh produsen pada masyarakat pada setiap tingkat harga. Kurva penawaran suatu barang seperti pada Gambar 6.1b. memperlihatkan pola hubungan antara barang yang ditawarkan pada berbagai tingkatan harga. Kurva penawaran tersebut tidak lain berupa penggambaran gradasi efisiensi satuan-satuan produksi. Dalam hukum pesawaran bentuk kurva penawaran akan menaik dari kiri bawah ke kanan atas. Pernyataan ini menggambarkan bahwa makin tinggi harga suatu barang, makin banyak barang yang dipasarkan. Ini dapat diasumsikan bahwa naikknya harga akan memberi keuntungan ekstra pada para produsen dan mereka akan cenderung untuk berproduksi lebih banyak lagi.

Contoh 1. Suatu permintaan terhadap barang A dicerminkan dari gejala berikut, yaitu jika barang A dijual seharga 8 rupiah per unit laku sebanyak 140 unit, sedangkan jika harga diturunkan menjadi 5 rupiah barang tersebut laku sebanyak 350 unit. (a) Bagaimanakah bentuk fungsi permintaan barang tersebut. (b) Berapa harga maksimum agar masih ada konsumen yang membelinya dan (c) zambarkan fungsi permintaan tersebut.

a. Fungsi permintaan dapat dicari dari hubungan linear yaitu:

$$\frac{P - P_1}{P_2 - P_1} = \frac{Q - Q_1}{Q_2 - Q_1} \text{ atau } P - P_1 = \frac{P_2 - P_1}{Q_2 - Q_1}(Q - Q_1)$$

$$P - 8 = \frac{5 - 8}{350 - 140}(Q - 140) = \frac{3}{210}(Q - 140)$$

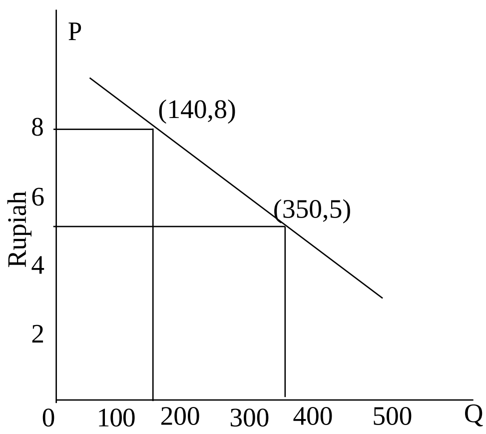
$$P = -1/70\,(Q - 140) + 8$$

$$= -1/70\,Q + 10$$

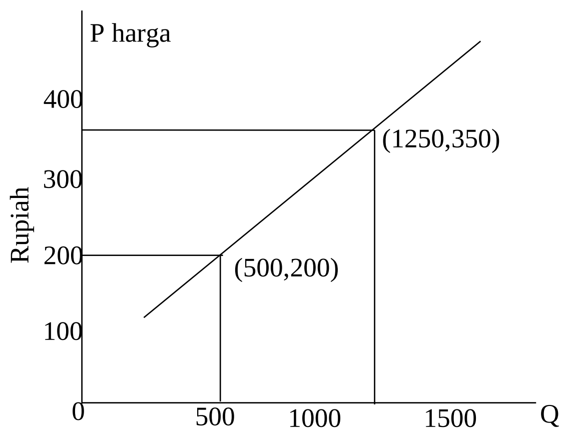
Jadi, fungsi permintaannya: $Q = -70P + 700$

b. Harga maksimum jika $Q = 0$, $P = -1/70 + 10 \rightarrow P = 10$. Akan tetapi, agar konsumen masih bersedia membeli haruslah $Q \neq 0$, sehingga harga barang A harus lebih rendah sedikit dari Rp10.-

c. Fungsi permintaan dilukiskan pada Gambar 6.2



Gambar 6.2 Fungsi Permintaan
Q = -70P +700



Gambar 6.3 Fungsi Permintaan
Q = -5P + 500

Contoh 2. Fungsi penawaran barang dicerminkan dari gejala yaitu bila barang tersebut dijual seharga Rp200,- per unit akan laku sebanyak 500 unit. Jika pada setiap kenaikan harga sebesar 200 rupiah jumlah yang terjual bertambah sebanyak 1.000 unit. Bagaimanakah bentuk fungsi penawaran barang tersebut dan berapa jumlah barang yang ditawarkan jika harganya 350 rupiah per unit.

a. Fungsi penawaran dapat dicari dari hubungan linear yaitu:

$$P - P_1 = \frac{P_2 - P_1}{Q_2 - Q_1}(Q - Q_1) \text{ atau } P - P_1 = \frac{\Delta P}{\Delta Q}(Q - Q_1)$$

$$P - 200 = \frac{200}{1.000}(Q - 500)$$

$P = 1/5\ (Q – 500) + 200$

$\quad = 1/5\ Q + 100$

Jadi, fungsi penawaran: Q=SP-500

b. Pada $P = 350 \rightarrow Q = 5(350) – 500 = 1.250$. Jadi jumlah barang yang ditawarkan sebanyak 1.250 unit.

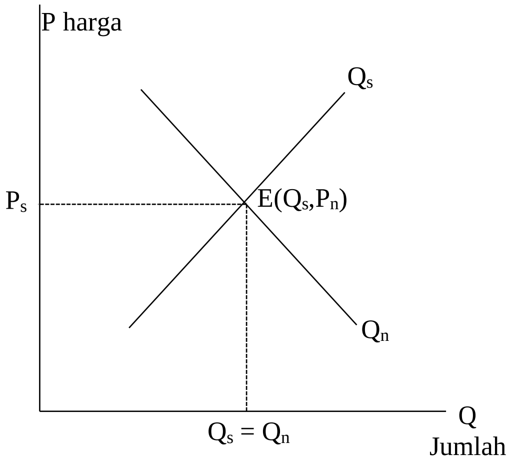
c. Fungsi penawaran dilukiskan pada Gambar 6.3.

6.2 KESEIMBANGAN HARGA

Hal yang sangat penting tentang konsep permintaan dan penawaran (*demand dan supply*) adalah terjadinya keseimbangan harga sebagai akibat tarik menarik gaya-gaya fungsi permintaan dan penawaran. Seperti pada Gambar 6.4, jika harga pada suatu ketika lebih tinggi atau rendah, maka selalu ada kecenderungan kembali pada titik keseimbangannya. Dengan kalimat lain, harga terbentuk dari adanya proses tawar-menawar antara konsumen dan produsen di pasar. Namun demikian, ada batas-batas tertinggi harga yang konsumen bersedia membeli dan ada batas harga terendah produsen juga bersedia menawarkan. Di antara keduanya inilah terbentuk harga.

Apabila harga lebih tinggi dari harga keseimbangan, maka jumlah barang yang ditawarkan lebih besar daripada jumlah barang yang diminta, barang akan menumpuk dan tidak laku sehingga ada kecenderungan harga akan turun. Tetapi sebaliknya, jika harga barang berada di bawah harga keseimbangan, maka jumlah barang yang diminta akan melebihi jumlah yang ditawarkan sehingga pembeli saling berebut, persediaan barang semakin berkurang dan menipis, harga cenderung akan naik lagi.

Titik keseimbangan pasar (*market equilibrium*) ditentukan adanya perpotongan kurva permintaan dan kurva penawaran, yaitu apabila jumlah barang yang diminta konsumen (Qa) sama dengan jumlah yang ditawarkan oleh produsen (Q.). Pada posisi keseimbangan pasar juga tercipta harga keseimbangan (*equilibrium price*). Secara matematis, keseimbangan pasar ditunjukkan oleh kesamaan



Gambar 6.4 Keseimbangan Harga

$Q = Q_1$. Seperti yang terlihat pada Gambar 6-4, keseimbangan pasar terjadi pada titik E (Q.P.) yaitu titik perpotongan kedua kurvatersebut.

Contoh 3. Fungsi permintaan pasar atas suatu barang dicerminkan oleh persamaan P = ½Q + 12, sedangkan penawarannya P = 1/3Q + 2. Berapakah harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan yang terjadi di pasar dan tunjukkan tingkat keseimbangan tersebut dalam gambar.

a. Keseimbangan pasar terjadi bilamana jumlah barang yang diminta sama dengan jumlah barang yang ditawarkan, atau Q = Q. Mengingat kedua persamaan tersebut masih dalam bentuk P = f(Q), maka perlu diubah dulu dalam bentuk Q = f(P).

   Permintaan: P = -½Q + 12 → Q = -2P + 24

   Penawaran: P = -½Q + 2 + Q = 3P – 6

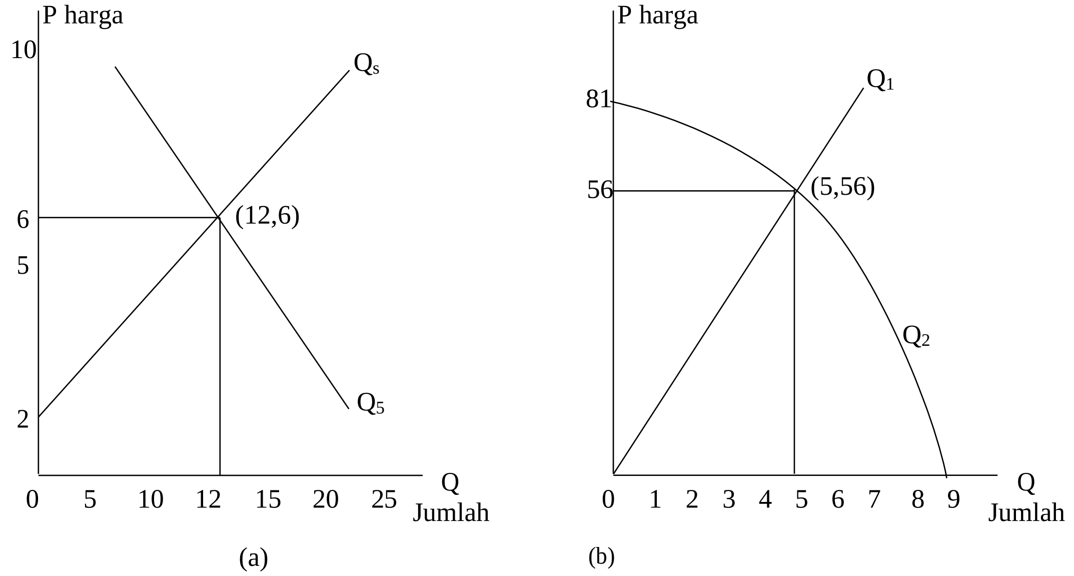
   Syarat keseimbangan: $Q_d = Q_x$

   - 2P + 24 = 3P – 6
   - 5P = -30 diperoleh P = 6

   Pada P = 6, diperoleh Q = 3(6) – 618 – 6 = 12

Jadi, keseimbangan pasar: Q_x. = 12 dan P_x = 6

b. Tingkat keseimbangan pasar ditunjukkan oleh perpotongan Q dengan Q, (Gambar 7.5a).



Gambar 6.5 Keseimbangan Harga

Contoh 4. Seperti pada contoh 3, jika fungsi permintaan ditunjukkan oleh persamaan $P = -Q^2 + 81$ dan penawaraninya $P = 11Q + 1$.

Cara I: Persamaan diubah dalam bentuk Q = f(P)

Permintaan: $P = -Q + 81 \rightarrow Q_d = \sqrt{(81 - P)}$

Penawaran: $P = 11Q + 1 \rightarrow Q_s = (P - I)/11$

Syarat keseimbangan: $Q_d = Q_s$

$\sqrt{(81 - P)}$ = (P-1V11

$121(81 - P) = (P - 1)^2$

$9801 - 121P = P^2 - 2P + 1$

$P^2 + 119P - 9800 = 0 \rightarrow (P - 56)(P + 175) = 0$

$P_1 = 56$ dan $P_1 = -175$ (tidak dipakai)

Pada P = 56, diperoleh Q = (56 – 1)/11 = 55/11 = 5

Jadi, keseimbangan pasar: $Q_x = 5$ dan $P_e = 56$

Cara II: Jika fungsi permintaan dan penawaran dalam bentuk P = f(Q), penyelesaian dapat juga dilakukan secara langsung karena hasil akhirnya sama (meskipun cara ini "melanggar” kaidah syarat keseimbangan), yaitu:

Permintaan, $P = -Q^2 + 81$ Penawaran : $P = 11Q + 1$

$-Q^2 + 81 \quad = 11Q + 1$

$Q + 11Q - 80 \quad = 0$

$(Q - 5)(Q + 16) = 0 \rightarrow Q_1 = 5$ dan $Q_2 = -16$ (tidak dipakai)

Pada Q = 5, maka P = 11(5) + 1 = 56

Jadi; keseimbangan pasar : $Q_x = 5$ dan $P_x = 56$ (keseimbangan pasar ditunjukkan pada Gambar 6,5b).

Contoh 5. Seperti contoh 3, jika fungsi permintaan ditunjukkan oleh persamaan P = (2Q – 1)(Q – 1) dan fungsi penawaran P = Q + 1.

a. Titik keseimbangan pasar terletak pada perpotongan yang memenuhi persyaratan kurva permintaan dan penawaran yang diperoleh:

   Permintaan: P = (2Q – 1)(Q – 1) dan fungsi penawaran P = Q + 1 menjadi, (2Q – 1)/(Q – 1) = Q + 1

   $2Q - 1 = (Q + 1)(Q - 1)$

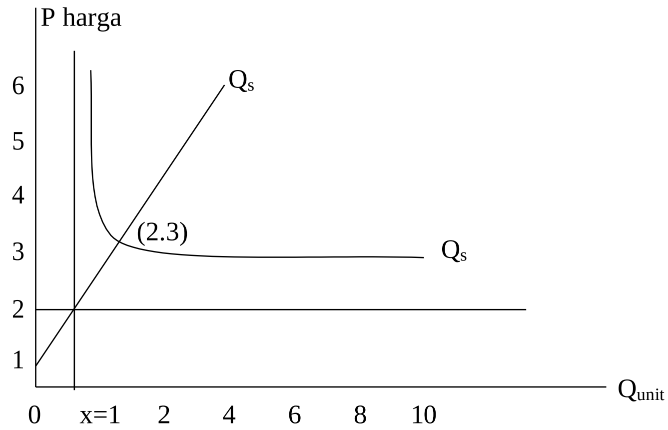
   $2Q - 1 = Q^2 - 1 \rightarrow Q^2 - 2Q = 0$

   diperoleh $Q_1 = 2$ dan $Q_2 = 0$

   Pada Q = 2, $\rightarrow$ P = (2) + 1 = 3

   Keseimbangan $Q_2 = 2$ dan $P_e = 3$

b. Keseimbangan pasar (Gambar 6-6).



Gambar 6.6

6.3 PERPAJAKAN

Penarikan pajak terhadap suatu barang akan berpengaruh terhadap posisi keseimbangan pasar, yaitu akan mempengaruhi harga keseimbangan maupun jumlah keseimbangan. Pembahasan masalah perpajakan pada buku ini adalah pajak tidak langsung yang berupa pajak penjualan. Dengan demikian, adanya pemungutan pajak atas penjualan suatu barang menyebutkan harga jual barang tersebut menjadi lebih tinggi.

Beban pajak yang dipungut pemerintah tersebut ternyata tidak sepenuhnya ditanggung oleh produsen, tetapi sebagian akan ditanggung oleh konsumen. Besarnya beban pajak yang ditanggung oleh konsumen adalah selisih antara harga keseimbangan sebelum pajak dengan harga keseimbangan sesudah pajak. Sedangkan besar bagian beban pajak yang diterima (pemerintah) dengan bagian pajak yang ditanggung konsumen.

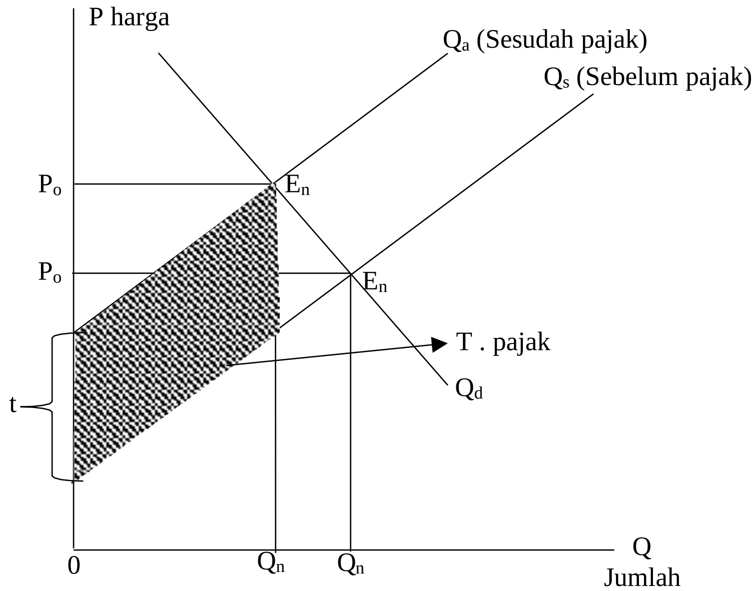
6.3.1 Pajak Per Unit

Pajak per unit adalah pajak yang ditentukan terhadap setiap hasil penjualan barang. Dalam hal ini, besarnya pajak per unit dinyatakan dengan notasi "Y". Adanya pajak per unit sebesar t ini, maka harga akan naik sebesar t untuk setiap jumlah barang yang ditawarkan. Secara geometris, kurva fungsi penawaran akan bergeser (naik) sebesar t. Dengan demikian, jika fungsi penawaran sebelum pajak P = f(Q), maka sesudah dikenakan pajak menjadi:

$$P = f(Q) + 1 \qquad 6 - 1$$

Dalam bentuk yang lain, jika fungsi penawaran dinyatakan Q = f(P), maka fungsi penawaran seperti rumus 1 dapat dibentuk sebagai (P – t) = f(Q). Dengan mengatur kembali beberapa variabel, diperoleh fungsi penawaran sesudah dikenakan pajak menjadi Q = f(P-t),

Seperti yang terlihat pada Gambar 6.7, pengaruh pajak akan menggeser titik keseimbangan semula dari titik E, menjadi di titik E_e. Harga keseimbangan sesudah pajak akan menjadi lebih mahal daripada harga keseimbangan sebelum pajak dan sebaliknya akan mengakibatkan jumlah permintaan barang menjadi lebih keicl (sedikit) dibanding sebelumnya.



Gambar 6.7. Pengaruh Pajak Terhadap Keseimbangan Pasar

Seperti yang telah dijabarkan diatas, seluruh beban pajak penjualan tidak seluruhnya ditanggung oleh produsen akan tetapi dialihkan sebagian beban pajak tadi kepada konsumen. Besarnya bagian beban pajak yang ditanggung oleh konsumen adalah selisih antara harga keseimbangan sesudah pajak dengan harga keseimbangan sebelum pajak. Dengan demikian, beban pajak total yang ditanggung oleh konsumen dapat dinyatakan sebagai berikut:

$T_k = (P_e – P_o) \times Q$ 6 – 2

Dimana T_k = Beban pajak yang ditanggung konsumen

P_o = Harga keseimbangan sebelum pajak.

P_e = Harga keseimbangan sesudah pajak.

Q = Tingkat empat equilibrium sesudah pajak.

Besar pajak total yang akan diterima oleh pihak pemerintah dapat hitung dari penjumlahan beban pajak yang ditanggung konsumen dengan beban pajak yang ditanggung produsen. Dapat pula itentukan dari besarnya pajak t per unit untuk setiap jumlah barang dikalikan dengan kuantitas dari barang yang ditawarkan yaitu :

$T = T_1 + T_2$ 6-4

atau

$T = t \times Q$ 6-5

dengan: T = Penerimaan pajak yang diterima pemerintah

t = Tingkat pajak per unit

Q = Tingkat output equilibrium sesudah pajak.

Contoh 6. Fungsi permintaan barang ditunjukkan persamaan P = -Q + 20 dan penawarannya P = Q + 2. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar t = 3 per unit. Ditanyakan:

a. Berapakah harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan sebelum pajak.
b. Berapa harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan sesudah pajak.
c. Hitunglah total pajak yang diterima pemerintah, besar pajak yang ditanggung oleh konsumen dan produsen.

Tak keseimbangan pasar terletak pada perpotongan yang memenuhi penyaratan kurva permintaan dan penawaran yang diperoleh:

a. Keseimbangan sebelum pajak

   Permintaan: $P - Q + 20$

   $\left.\right]$ keseimbangan pasar $Q_d - Q_s$

   Penawaran $PQ + 2$

   $-Q + 20 = Q + 2 \rightarrow 2Q = 18$ diperoleh $Q = 9$

   Pada Q = 9, maka P = 9 + 2 = 11. Jadi,

   Titik keseimbangan Q = 9 dan $P_n = 11 \rightarrow E,(9.11)$.

b. Keseimbangan sesudah pajak

   Pajak akan mempengaruhi (menaikkan) harga jual dan ini tercermin pada perubahan harga sisi penawaran

   Permintaan: P = Q + 20 (tetap)

   Penawaran: P = (Q + 2) + 1(Q + 2) + 3 = Q + 5

   -Q + 20 = Q + 5 – 20 – 15 diperoleh Q = 7.5

   Pada Q = 7.5 maka P(7.5 + 2) + 3 = 12.5. Jadi,

   Titik keseimbangan $Q_e = 7{,}5$ dan $P_e = 12.5 \rightarrow E(7.5 : 12.5)$

c. - Pajak yang ditanggung oleh konsumen:

     $T_k = (P_e – P_o)$ xQ (12,5 – 11) x 75

     = 11,25

   - Pajak yang ditanggung oleh produsen:

     $Tp = (P_o – P_1)$ x Q = (11 – 9,5) x 7,5

     = 11.25

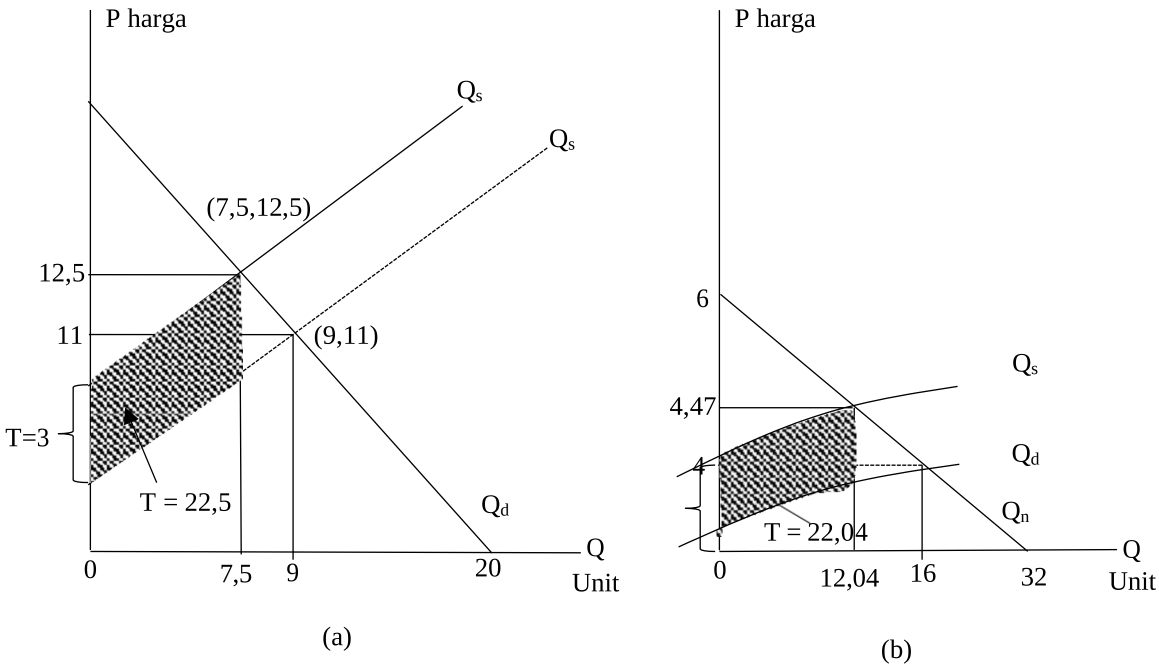
- Pajak yang diterima oleh pemerintah:

  $T = T_1 + T_2$ atau $T = 1 \times Q$

  $= 11{,}25 + 11{,}25$ $= 3 \times 7{,}5$

  $= 22{,}50$

d. Tingkat keseimbangan pasar ditunjukkan oleh perpotongan kurva permintaan dan penawaran sebelum dan sesudah pajak (Gambar 6.8a).



Gambar 6.8. Keseimbangan Pasar Sebelum dan Sesudah Pajak

Contoh 7. Kerjakan seperti contoh-6, jika diketahui fungsi permintaan ditunjukkan $Q = -P^2 + 32$ dan penawarannya $Q = P^2$. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar $t = 1$ per unit.

a. Keseimbangan sebelum pajak:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Permintaan: } Q = -P^2 + 32 \\ &\text{Permintaan: } Q = -P^2 \end{aligned}\right] \text{ keseimbangan pasar } Q_d = Q_s$$

$-P^2 + 32 = P^2 \rightarrow \quad 32 = 2P^2$

$16 = P^2 \rightarrow P_1 = 4$ dan $P_2 = -4$ (tidak dipakai karena alasan ekonomis)

Pada $P = 4$, maka $Q = (4)^2 = 16$. Jadi, Titik keseimbangan Q = 16 dan $P_o = 4 \rightarrow E_o(16,4)$

b. Keseimbangan sesudah pajak:

Permintaan: $Q = -P^2 + 32$ (tetap)

Penawaran: $Q = (P - 1)2 \rightarrow Q = (P^2 - 2P + 1)$

Syarat keseimbangan: $Q_d = Q_s^1$

$-P^2 + 32 = P^2 + 2P + 1$

$2P^2 - 2P - 31 = 0 \rightarrow P^2 - P - 15{,}5 = 0$ mencari akar-akar P.

$$P_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(1 - 62)}}{2(1)} \rightarrow P_1 = 4{,}47 \text{ dan } P_2 = -3{,}47$$

Pada P = 4,47 maka Q = (4,47 – 1)2 = 12,04. Jadi,

Titik keseimbangan $Q_e = 12{,}04$ dan $P_e = 4{,}47 \rightarrow E_e(12{,}4;4{,}47)$

c. - Pajak yang ditanggung oleh konsumen:

$T_k = (P_e - P_o) \times Q = (4{,}47 - 4) \times 12{,}04$

$= 5{,}66$

- Pajak yang ditanggung oleh produsen

$T_p = (P_e - P_o) \times Q\ (4 - 3{,}47) \times 12{,}04$

$= 6{,}38$

- Pajak yang diterima oleh pemerintah

$T = T_1 + T_2$ atau $T = t \times Q$

$= 5{,}66 + 6{,}38$ $= 1 \times 12{,}04$

$= 12{,}04$ $= 12{,}04$

d. Tingkat keseimbangan pasar ditunjukkan oleh perpotongan kurva permintaan dan penawaran sebelum dan sesudah pajak (Gambar 6.8b).

6.3.2 Pajak Persentase

Pajak persentase adalah pajak yang diperhitungkan sebesar persentase yang tetap dari hasil penjualan. Dalam hal ini, besarnya pajak persentase dinyatakan dengan notasi "Y". Adanya pajak persentase sebesar r ini, maka harga yang ditawarkan akan naik sebesar r% untuk setiap jumlah barang yang ditawarkan. Jika fungsi penawaran sebelum pajak P = f(Q), maka fungsi penawaran sesudah dikenakan pajak menjadi:

$$P_t = f(Q)(1 + r) = P(1 + r) \qquad 6\text{-}6$$

Notasi P_r dimaksudkan juga sebagai harga keseimbangan setelah dikenakan pajak yaitu sama dengan P_e.

Besarnya pajak persentase yang diuraikan di atas ternyata dapat juga dikonversikan sebagai pajak per unit untuk suatu tingkatan kuantitas yaitu:

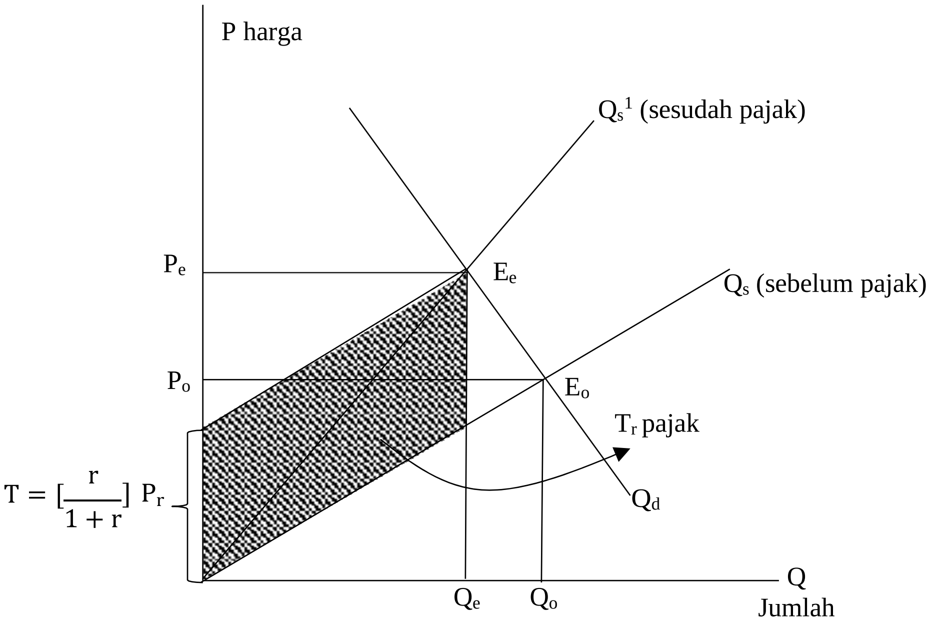
$$t = r \times P \qquad 6\text{-}7$$

Dari persamaan 6-7 dan persamaan 6-6, konversi pajak per unitnya menjadi,

$$t = \frac{r}{1+r} \times P_r \qquad 6-8$$

Dengan mensubstitusikan persamaan 6-8 ke dalam persamaan, 6-5, diperoleh pajak total yang akan diterima pemerintah yaitu:

$$T = \left[\frac{r}{1+r}\right] P_r \times Q \qquad 6-9$$



Gambar 6.9 Pengaruh Pajak Persentase Terhadap Keseimbangan Pasar.

Contoh 8. Fungsi permintaan barang ditunjukkan oleh persamaan P = -Q + 29 dan fungsi penawaran P = Q + 4. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak penjualan sebesar r = 20%. Ditanyakan:

a. Berapakah harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan sebelum pajak,
b. Berapa harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan sesudah pajak.
c. Besar pajak yang ditanggung oleh konsumen dan produsen dan

d. Gambarkan grafik fungsi tersebut.

Titik keseimbangan pasar terletak pada perpotongan yang memenuhi persyaratan kurva permintaan dan penawaran yang diperoleh:

a. Keseimbangan sebelum pajak

$\text{Permintaan: } P - Q + 29$

$\Big]$ keseimbangan pasar $Q_d = Q_x$

$\text{Penawaran: } PQ + 4$

-Q + 29 = Q + 4 – 2Q = 25 diperoleh Q = 12,5

Pada Q = 12,5 maka P – 12,5 + 29 = 16,5. Jadi,

Titik keseimbangannya Q_o = 12,5 dan P_o = 16,5 – E_o (12,5;16,5)

b. Keseimbangan sesudah pajak:

Permintaan: P = -Q + 29 (tetap)

Penawaran: P_r = P(1+r) = (Q + 4)(1 + 0,2) = (Q + 4)6/5

-Q + 29 = (Q + 4) 6/5

-5Q + 145 = 6Q + 24 $\rightarrow$ 121 = 11Q sehingga Q = 11

Pada Q = 11, maka P = -11 + 29 = 18. Jadi,

Titik keseimbangan Q_e = 11 dan P_e = 18 $\rightarrow$ E(11,18)

c. Pajak yang ditanggung oleh konsumen:

$T_k = (P_e – P_o) \times Q = (18 – 16,5) \times 11$

$= 16.5$

- Pajak yang ditanggung oleh produsen:

  $T_k = (P_e - Po) \times Q = (16,5 – 15) \times 11$

  $= 16,5$

- Pajak yang diterima oleh pemerintah:

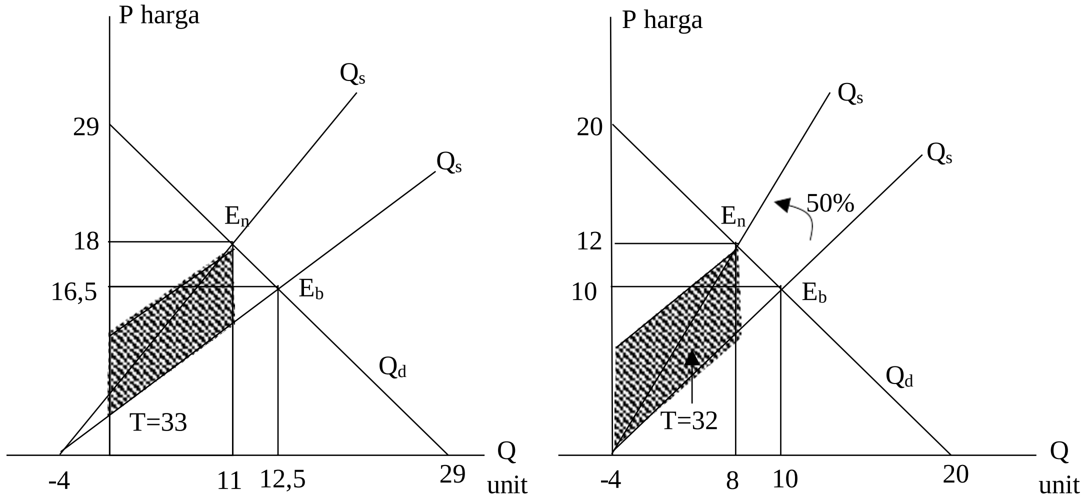
$T = T_k + T_p$ atau $T = \left[\frac{r}{1+r}\right] P_e Q$

$= 16,5 + 16,5$ $\quad = \left[\frac{0,2}{1+0,2}\right] 18 \times 11$

$= 33$

$= 33$

d. Tingkat keseimbangan pasar ditunjukkan oleh perpotongan kurva permintaan dan penawaran sebelum dan sesudah pajak (Gambar 6.10a)



Gambar 6.10 Keseimbangan Pasar Sebelum dan Sesudah Pajak.

Contoh 9. Kerjakan seperti contoh-8. Diketahui fungsi permintaan barang ditunjukkan Q = -P + 20 dan penawaran Q = P. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak penjualan sebesar r = 50%.

a. Keseimbangan sebelum pajak:

Permintaan: $P - Q + 29$

] keseimbangan pasar $Q_d = Q_s$

Penawaran: $Q = P$

Syarat keseimbangan: $Q_d = Q_s$

$-P + 20 = P \rightarrow 2P = 20$ diperolch $P = 202 = 10$

Pada P = 10, maka Q = (10) = 10 unit. Jadi,

Titik Keseimbangannya $\rightarrow E_o$ (10, 10)

b. Keimbangan sesudah pajak

Permintaan: Q = -P + 20 (tetap)

Penawaran: Q = (10/15)(P)

Syarat keseimbangan $Q_a = Qs$

$-P + 20 = (10/15)P \rightarrow 15P + 300 = 10P$

$25P = 300 \rightarrow P = 300/25 = 12$

Pada P = 12 diperoleh Q = (10/15)(12) = 8 unit. Jadi,

Titik keseimbangannya Q = 8 dan $P_e = 12 \rightarrow E_e$ (8. 12)

c. Pajak yang ditanggung oleh konsumen:

$T_k = (P_e - P_n) \times Q = (12 - 10) \times 8$

$= 16$

Pajak yang ditanggung oleh produsen

$T_x = (P_o - P_o) \times Q = (10 - 8) \times 8$

$= 16$

Pajak yang diterima oleh pemerintah

$T = T_k + T_p$ atau $T = [\frac{r}{1+r}] P_e \times Q$

$= 16 + 16$ $= [\frac{0,5}{1+0,5}] 12 \times 8$

$= 32$ $= 32$

d. Tingkat keseimbangan pasar ditunjukkan oleh perpotongan kurva permintaan dan penawaran sebelum dan sesudah pajak (Gambar 6.10).

6.4 SUBSIDI

Subsidi merupakan bantuan yang diberikan Pemerintah kepada produsen terhadap barang yang dihasilkan. Adanya subsidi yang dikenakan terhadap suatu barang beban produk akan menjadi lebih rendah sehingga produsen berani menjual dengan harga yang lebih murah. Hal ini disebabkan sebagian dari biaya-biaya untuk memproduksi dan memasarkan barang ditanggung Pemerintah. Sehingga dengan adanya subsidi ini, kurva fungsi penawaran akan bergeser (turun), sedangkan kurva fungsi permintaannya tetap.

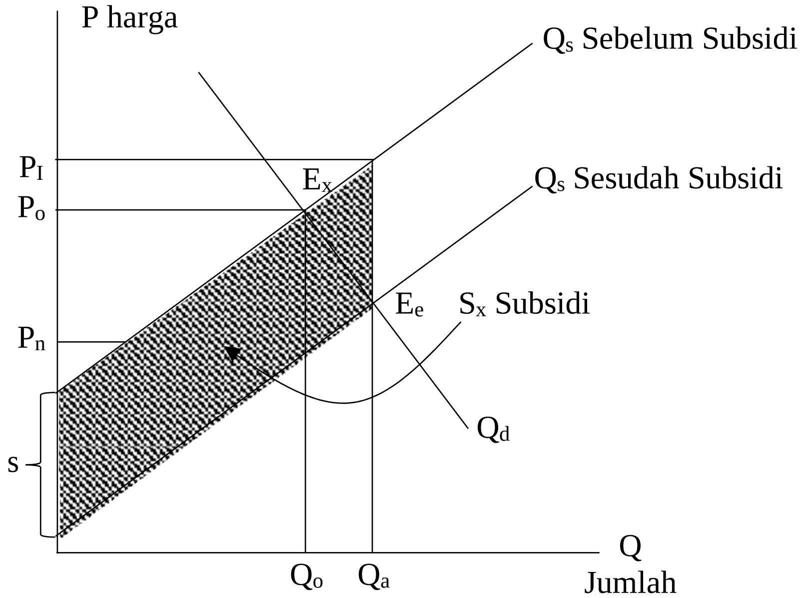
Pengaruh subsidi akan menggeser titik keseimbangan semula E_o menjadi E. Harga keseimbangan sesudah adanya subsidi menjadi lebih rendah daripada harga keseimbangan sebelumnya dan sebaliknya akan menggeser jumlah permintaan barang menjadi lebih besar.

Subsidi per unit yang dikenakan terhadap setiap produk yang ditawarkan dinyatakan dengan notasi "s". Secara geometris, kurva fungsi penawaran akan bergeser (turun) sebesar s untuk setiap tingkat kuantitas yang ditawarkan. Dengan demikian, jika fungsi penawaran sebelum diberikan subsidi P = f(Q), maka sesudah diberikan subsidi menjadi:

$$P = f(Q) - s \qquad 6\text{-}10$$

Dalam bentuk yang lain, jika fungsi penawaran dinyatakan Q = f(P), maka fungsi penawaran seperti pada rumus 6-10 dapat dibentuk sebagai (P + s) = f(Q).

Dengan mengatur kembali beberapada variabel diperoleh fungsi penawaran sesudah diberikan subsidi menjadi Q = f(P + s).



Gambar 6.11 Pengaruh Subsidi Terhadap Keseimbangan Pasar.

Seperti pada Gambar 6.11, pengaruh subsidi akan menggeser titik keseimbangan semula E, menjadi E. Harga keseimbangan sesudah subsidi menjadi lebih rendah dibanding harga keseimbangan sebelumnya.

Contoh 10. Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan P = -Q + 10 sedangkan penawarannya P = 0 + 2.

Subsidi sebesar s = 2 per unit dikenakan terhadap barang yang dijual.

a. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan sebelum subsidi.
b. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan sesudah subsidi
c. Hitunglah besarnya subsidi yang diberikan pemerintah.

a. Keseimbangan sebelum subsidi

   Permintaan: P = -Q + 10 → Q = -2P + 20

   Penawaran: P = Q + 2 – Q = 6P – 12

   Syarat keseimbangan: Qd = Qs

   -2P + 20 = 6P – 12 → 8P – 32 diperoleh P = 4

   Pada P = 4 maka Q = 6(4) – 12 = 12. Jadi,

   Titik keseimbangan Qo = 12 dan Po = 4 → Eo (12,4)

b. Keseimbangan sesudah subsidi

Subsidi mempengaruhi (menurunkan) harga jual dan ini tercermin pada perubahan harga sisi penawaran.

Permintaan: Q = -2P + 20 (tetap)

Penawaran: P = (1/6Q + 2) – s = (1/6Q + 2) – 2 → Q = 6P

atau Q = 6(P + s)-12-Q=6(P+2)-12-Q= 6P

Syarat keseimbangan: $Qd = Qs^1$

-2P + 20 = 6P → 8P = 20 diperoleh P = 2,5

Pada P = 2,5 maka Q = 6(2,5) = 15. Jadi,

Titik keseimbangannya Qe = 15 dan Pe = 2,5 → E (15:2,5)

c. - Subsidi yang diterima oleh konsumen:

Sk = (Po – Pe) x Q = (4 – 2,5) x 15

= 22,5

- Subsidi yang diterima oleh produsen.

Sp = ($P_1 - P_o$) x Q (4,5 – 4) x 15

= 7,5

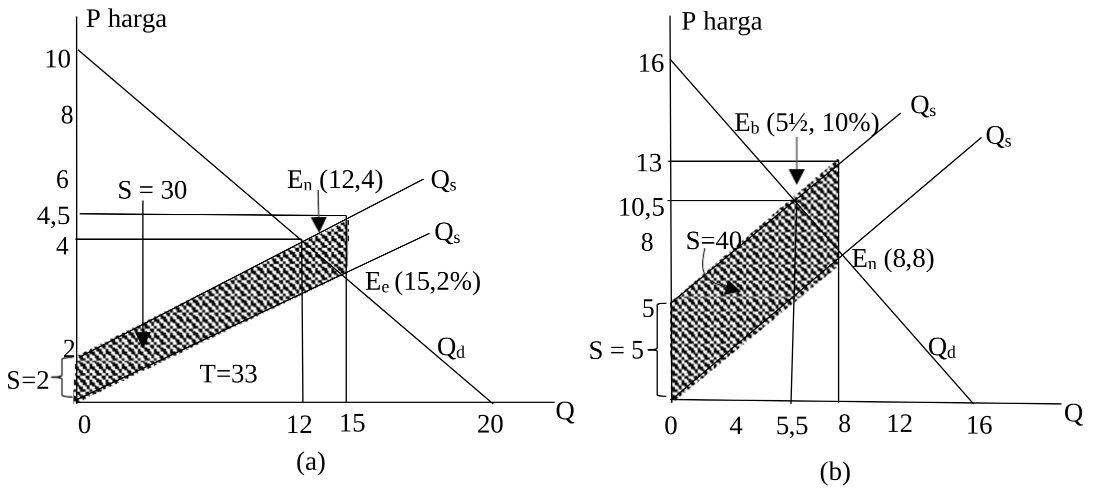
- Subsidi yang dibayar oleh pemerintah:

S = Sk + Sp atau T = 1 x Q

= 22,5+ 7,5 = 2 x 15

= 30 = 30

d. Tingkat keseimbangan pasar ditunjukkan oleh perpotongan, kurva permintaan dan penawaran sebelum dan sesudah subsidi (Gambar 6.12a).



Gambar 6.12 Keseimbangan Pasar Sebelum dan Sesudah Subsidi

Contoh 11. Kerjakan seperti contoh 10, diketahui fungsi permintaan barang ditunjukkan oleh persamaan P = 16 – Q dan penawarannya P = Q + 5. Subsidi sebesar x = 5 per unit diberikan terhadap barang yang dijual.

a. Keseimbangan sebelum subsidi:

   Permintaan: P = 16 – Q

   Penawaran: P = Q + 5

   Taik keseimbangan pasar terletak pada perpotongan yang memenuhi persyaratan kurva permintaan dan penawaran yang diperoleh:

   16 – Q = Q + 5 → 11 = 2Q diperoleh Q = 5,5

   Pada Q = 5.5 unit, maka P-16-5.5 = 10.5. Jadi.

   Titik keseimbangan → Eo(5.5 10,5)

b. Keseimbangan sesudah subsidi:

   Permintaan: P = 16 – Q (tetap)

   Penawaran: P (Q + 5) – s = Q + 5 – 5

   16 – Q = Q → 16 – 2Q diperoleh Q = 8

   Pada Q = 8 unit, maka P 16 – (8) = 8

   Titik keseimbangan → Ee (8, 8)

c. Subsidi yang diterima oleh konsumen

   Sk = (Po – Pe) x Q = (10,5 – 8) x 8

   = 20

   Subsidi yang diterima oleh produsen

   Sp = (P_1 – Po) x Q = (13 – 10,5) x 8

   = 20

   Subsidi yang dibayar oleh pemerintah:

   S = Sk + Sp atau T = t x Q

   = 20 + 20

   = 5 x 8

   = 40

d. Tingkat keseimbangan pasar ditunjukkan oleh perpotongan kurva permintaan dan penawaran sebelum dan sesudah subsidi (Gambar 6.12b)

6.5 FUNGSI PRODUKSI

Fungsi produksi adalah suatu fungsi yang menunjukkan hubungan antara hasil produksi fisik (output) maksimum yang dapat dihasilkan dari suatu ramuan faktor-faktor produksi (input) tertentu dengan teknologi tertentu. Fungsi produksi dinyatakan sebagai P = f(Q) dimana P adalah total produksi dan Q jumlah input atau faktor-faktor produksi.

Secara umum fungsi produksi dituliskan sebagai:

$$P = f(Q_1, Q_2, \ldots\ldots, Q_n) \qquad 6\text{-}11$$

Untuk menggambarkan fungsi produksi ini secara jelas dan menganalisis peranan masing-masing faktor produksi, maka dan sejumlah input-input produksi tersebut salah satu faktor produk dianggap variabel bebas sedangkan faktor-faktor produksi lainnya dianggap konstan. Apabila faktor produksi variabel bebas baru sedikit sekali jumlahnya dibanding dengan input-input produksi yang tetap, maka setiap penambahan satu satuan input akan mengakibatkan kenaikan total produksi bertambah (*increasing*) dan sebaliknya akan berkurang (*decreasing*).

Dari segi teori ekonomi, diambil asumsi dasar mengenai karakteristik dari fungsi produksi yang tunduk pada suatu hukum yang disebut *The law of Diminishing Return*. Hukum ini menyatakan bahwa bila satu macam input produksi ditambah penggunaannya, sedang input-input yang lain dianggap tetap, maka tambahan output yang dihasilkan setiap tambahan satu unit input tadi mula-mula menaik, tetapi kemudian menurun bila input tersebut terus ditambahkan. Tambahan output yang dihasilkan dari penambahan satu unit input variabel sering disebut *Marginal Physical Product* atau MPP = AP/AQ (konsep marginal akan dibahas dalam bab diferensial).

Ada 3 (tiga) buah kurva yang sangat penting dalam mempelajari tingkat penggunaan input dalam proses produksi yaitu:

1. Kurva Total Physical Product atau TPP adalah kurva yang menunjukkan tingkat produksi total P = f(Q) pada berbagai tingkat penggunaan input variabel sedangkan input lain dianggap tetap TPP = P = f(Q).
2. Kurva *Average Physical Product* (APP) adalah kurva yang menunjukkan hasil rata-rata per unit input variabel pada berbagai tingkat penggunaan input yaitu:

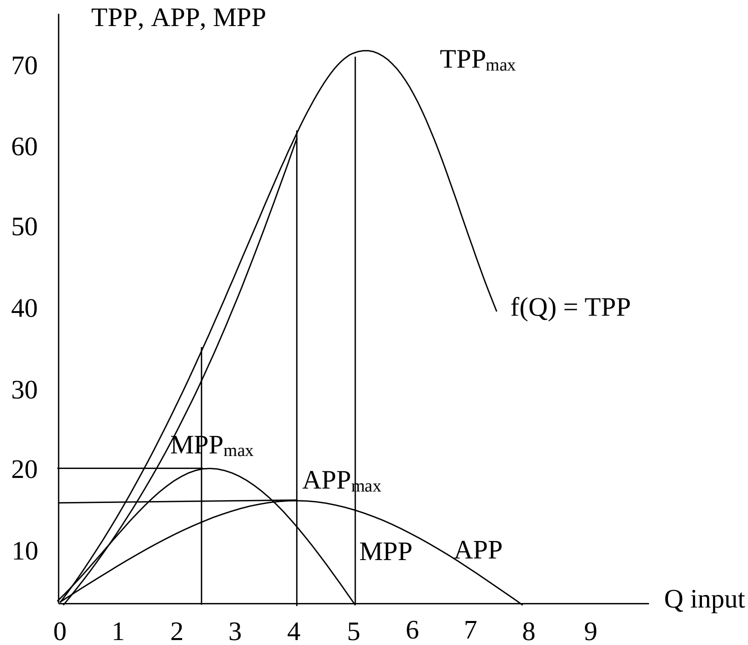
$$\mathrm{APP} = \frac{\mathrm{TPP}}{\mathrm{Q}} \qquad 6-12$$

3. Kurva Marginal Physical Product (MPP) adalah kurva yang menunjukkan tambahan kenaikan dari *Total Physical Product* yaitu ΔTPP yang disebabkan oleh penggunaan tambahan satu unit input variabel yaitu:

$$\mathrm{MPP} = \frac{\Delta \mathrm{PP}}{\Delta \mathrm{Q}} \qquad 6-13$$

Input Produksi (Q)	Total Physical Product (TPP)	Average Physical Produc (APP=TPP/Q)	Marginal Physical Product MPP=ΔTPP/ΔQ
1	7	7	11
2	24	12	20
3	45	15	21
4	64	16	16
5	75	15	5
6	72	14	negatif
7	49	7	negatif

Secara geometris, ketiga kurva di atas dapat ditunjukkan oleh Gambar 6.13 berikut ini.



Gambar 6.13 Fungsi Produksi

Contoh 12. Fungsi produksi ditunjukkan oleh persama P = $6Q^2 - Q^3$ di mana (P output produksi dan Q input produksi dan Q input produksi): a). Carilah fungsi produksi rata-rata dan hitunglah produksi total jika digunakan input sebanyak Q = 3, b). Berapa produksi marginalnya jika digunakan tambahan input sebanyak 1 unit?

a. Fungsi produksi total TPP = P = $60^2 - Q^1$

   Fungsi produksi rata-rata APP = TPP/Q = $6Q^2 - Q^3/Q$

   $= 6Q - Q^2$

   Pada Q = 3, TPP = P = $6(3)^2 - (3)^3 = 54 - 27 = 27$

   APP = $6(3) - (3)^2 = 18 - 9 = 9$

b. Tambahan input 1 unit sehingga Q = 3 + ΔQ – 4 unit

   Pada Q = 4 unit, TPP – P = $6\ (4) - (4)^3 = 96 - 64 = 32$

   $$\text{MPP } = \frac{\Delta P}{\Delta Q} = \frac{32 - 27}{4 - 3} = 5$$

Contoh 13. Sebuah fungsi produksi ditunjukkan oleh persamaan P = $8Q^2 - Q^3$. Ditanyakan: a. Carilah fungsi produksi rata-ratanya dan hitunglah produksi total dan produksi rata-rata pada input Q = 2. Berapa produksi marginalnya jika digunakan tambahan input sebanyak 1 unit?

a. Fungsi produksi total TPP = P $= 8Q^2 - Q^3$

   Fungsi produksi rata-rata APP = TPP/Q = $(8Q^2 - Q^3)/Q$

   $= 8Q - Q^2$

   Pada Q = 2, TPP = P = $8(2)^2 - (2)^3 = 32 - 8 = 24$

   APP = $8(2) - (2)^2 = 16 - 4 = 12$

b. Tambahan input I unit sehingga Q = 2 + ΔQ = 3 unit

   Pada Q = 3 unit, TPP = P = $8(3)^2 - (3)^3 = 72 - 27 = 45$

   $$\text{MPP} = \frac{\Delta P}{\Delta Q} = \frac{45 - 24}{3 - 2} = 21$$

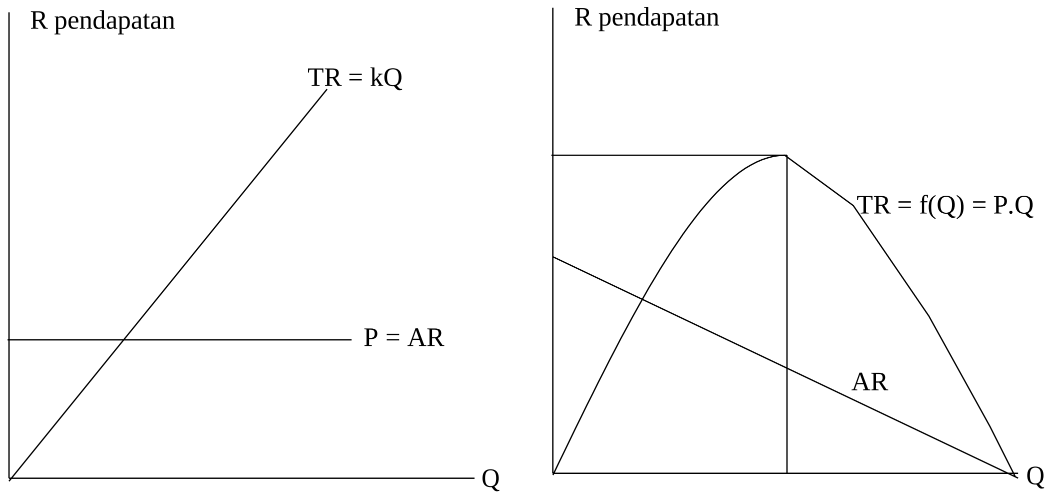
6.6 FUNGSI PENDAPATAN

Pendapatan total (*total revenue* atau TR) adalah besarnya hasil pendapatan yang diterima oleh produsen dari hasil penjualan sejumlah barang yang diproduksi. Besarnya pendapatan total ini tidak lain sebagai hasil kali jumlah barang yang terjual dengan harga jual per unit yang terjadi karena adanya permintaan.

Jika Q merupakan jumlah atau kuantitas barang dan P merupakan harga permintaan, maka fungsi pendapatan total dapat dinyatakan secara matematis yaitu,

$$TR = f(Q) = P \, . \, Q \qquad 6\text{-}14$$

Bentuk kurva pendapatan total tergantung pada hubungan fungsional dengan variabel Q yang diberikan. Pada pasar persaingan sempurna, fungsi pendapatan total akan berbentuk garis lurus. Sedangkan pada pasar monopoli, fungsi pendapatan total berupa parabola terbuka ke bawah (cembung).



(a) Pusat Persaingan Sempurna

(b) Pasar Monopoli

Gambar 6.14 Fungsi Pendapatan Toal (TR)

Pendapatan total ini dapat juga diperluas dengan apa yang disebut pendapatan rata-rata (*average revenue* atau AR). Pendapatan rata-rata dapat dinyatakan sebagai pendapatan total yang dihasilkan dari setiap kuantitas barang yang ditawarkan/diminta yang merupakan hasil bagi pendapatan per unit barang yang diperoleh dari penjualan suatu barang pada jumlah tertentu. Pendapatan rata-rata ini kemungkinan berbeda-beda besarnya pada berbagai tingkat kuantitas barang dan bergantung pada bentuk fungsi pendapatan totalnya.

$$AR = \frac{TR}{Q} = P \qquad 6 - 15$$

dengan P merupakan harga permintaan dari barang tersebut.

Contoh 14. Fungsi permintaan suatu barang yang dihadapi perusahaan monopolis dicerminkan oleh persamaan P = 10 – Q   6-15

Ditanyakan:

a. Bagaimana bentuk fungsi pendapatan total TR
b. Pada tingkat produksi berapa unit, pendapatan total akan maksimum
c. Hitunglah pendapatan rata-rata pada tingkat output tersebut.
d. Gambarkan fungsi pendapatan total dan pendapatan rata-rata.

a. Diketahui, fungsi permintaan P = 10 – Q. Jadi,

   Pendapatan total TR = P.Q = (10 – Q) Q

   $= 10Q – Q^2$

b. TR maksimum terjadi pada Q = -b/2a $\rightarrow$ Q = -10/2(-1) = 5 unit.

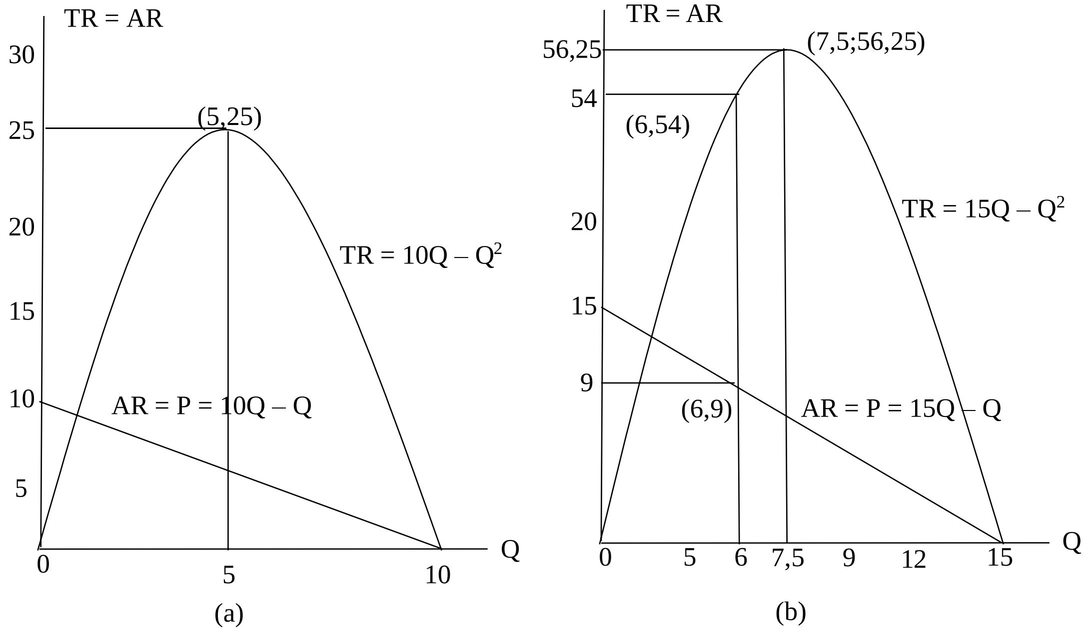
   Jadi, R_{max} = 10(5) – (5)2 = 50 – 25 = 25

c. Pendapatan rata-rata, AR = TR/Q = $(10Q – Q^2)/Q = 10 – Q$

   Pada Q = 5, $\rightarrow$ AR = 10 – (5) = 5

d. Gambar 6.15a

Contoh 15. Fungsi permintaan barang yang dihadapi perusahaan monopolis dicerminkan oleh persamaan Q = 15 – P.



Gambar 6.15

a. Bagaimana bentuk fungsi pendapatan dan pendaptan rata-rata.
b. Berapa besarnya pedapatan total dan pendapatan rata-rata bila terjual sebanyak 6 unit dan berapa harga jualnya.
c. Gambarkan fungsi pendapatan total dan pendapatan rata-rata.

a. Fungsi permintaan masih dalam betuk Q = f(P), maka diubah menjadi bentuk P = f(Q) yaitu P = -Q + 15 Jadi,

Fungsi pendapatan TR $= P.Q = (-Q + 15)Q$

$= -Q^2 + 15Q$

Fungsi pendapatan rata-rata AR $= TR/Q = (-Q^2 + 15Q)/Q$

$= -Q + 15$

b. Pada Q = 6 unit, $\rightarrow TR = -(6)^2 + 15(6) = -36 + 90 = 54$

$\rightarrow AR = -(6) + 15 = 9$

Harga jual pada Q = 6, $\rightarrow P = -(6) + 15 = 9$

c. Gambar 6.1b.

6.7 FUNGSI BIAYA

Teknik-teknik matematika, dalam ilmu-ilmu ekonomi seringkali dimanfaatkan pula misalnya dalam analisis biaya. Seperti kita ketahui, yang dimaksud dengan biaya total (*total cost atau TC*) adalah biaya yang dikeluarkan oleh seorang produsen (perusahaan) untuk memprodusir dan atau memasarkan sejumlah barang atau jasa. Biaya total ini terdiri dari biaya tetap (*fix cost* atau FC) dan biaya variabel (*variable cost* atau VC).

Biaya tetap adalah biaya yang tidak dipengaruhi oleh jumlah unit barang yang diproduksi. Biaya ini berakumulasi dengan jalannya waktu. Biaya ini tidak berubah dalam jumlah, tetapi secara proporsional menjadi makin kecil per unit bila jumlah unit yang diproduksi semakin bertambah. Sedangkan biaya variabel, merupakan biaya yang tergantung pada jumlah anit yang diproduksi. Biaya per unitnya seragam, akan tetapi biaya totalnya makin besar bila jumlah produksi semakin bertambah.

Secara matematis, bentuk fungsi biaya total dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$TC = f(Q) = FC + VC \qquad 6\text{-}16$$

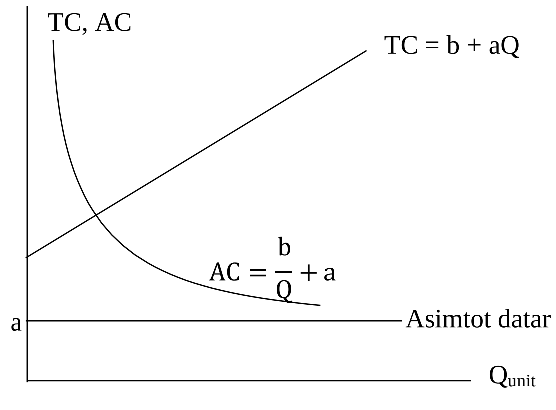
Dengan diketahui biaya total untuk memproduksi sejumlah barang Q, dapat juga diperhitungkan besarnya biaya rata-rata (*average cost* atau AC). Biaya rata-rata dapat dinyatakan sebagai biaya total yang dikeluarkan untuk setiap unit barang yang diproduksi yang merupakan hasil bagi biaya total terhadap jumlah barang yang diproduksi.

$$\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{TC}}{\mathrm{Q}} \qquad 6-17$$

Biaya rata-rata ini kemungkinan berbeda-beda besarnya pada berbagai tingkat produksi barang tergantung bentuk fungsi biaya sotalnya. Tingkat produksi yang mempunyai biaya-rata-rata yang terendah disebut tingkat produksi yang optimal. Pola hubungan variabel baya total dan variabel kantitas barang dapat berbentuk fungsi linear (garis lurus) dan dapat pola berbentuk fungsi non linear seperti fungsi kuadrat, fungsi pangkat kubik maupun eksponensial.

6.7.1 Fungsi Biaya Total: Garis Lurus

Jika biaya total berupa fungsi linear TC = f(Q) = b + aQ (b konstanta), maka biaya tetap FC sama dengan b dan biaya variabel VC merupakan fungsi jumlah barang yang dihasilkan yaitu aQ. Sedangkan biaya rata-rata akan berbentuk hiperbola dengan asimtot dasar. Kurva biaya rata-rata tersebut akan terus menurun dengan bertambahnya Q (Gambar 6.16)



Gambar 6.16 Fungsi Biaya Total dan Rata-rata (Linear)

Contoh 16. Biaya total yang dikeluarkan oleh produsen dicerminkan oleh persamaan TC = 2Q + 2. Hitunglah biaya total dan biaya rata-rata pada tingkat produksi sebesar Q = 3 unit dan Q = 5 unit. Gambar masing-masing fungsi biaya total dan biaya rata-rata.

a. Diketahui fungsi biaya total TC = 2Q + 2

   Pada Q = 3 unit, TC = 2(3) + 2 = 8

   Pada Q = 5 unit. TC = 2(5) + 2 = 12

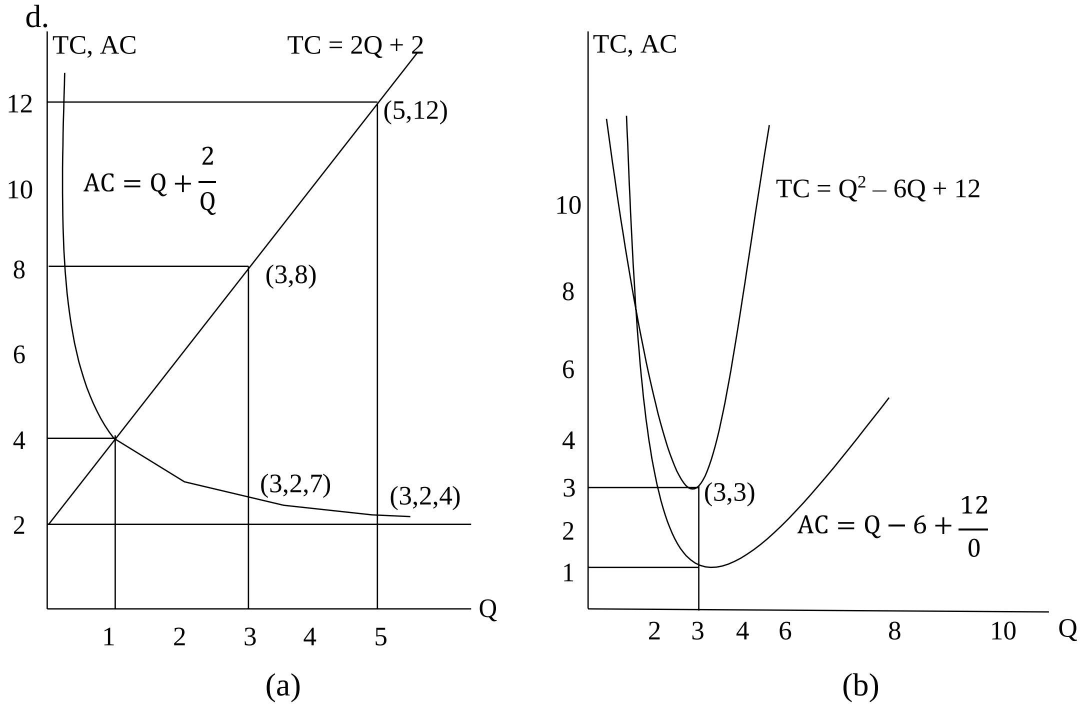
b. Biaya rata-rata AC = TC/Q = 2 + 2/Q

   Pada Q = 3 unit, AC = 2 + 2/(3) = 2,67

   Pada Q = 5 unit, AC = 2 + 2/(5) = 2,4

c. Fungsi biaya total dan fungsi biaya rata-rata (Gambar 6.17a).

d.



Gambar 6.17 Fungsi Biaya Total dan Biaya Rata-Rata.

6.7.2 Fungsi Biaya Total: Kuadrat

Kurva fungsi biaya total non linear yang berbentuk parabolik, fungsi biaya totalnya merupakan fungsi kuadrat yaitu $TC = aQ^2 + bQ + c$. Dimana Q adalah variabel kuantitas atau jumlah barang dan a,b,c merupakan konstanta. Dari fungsi tersebut maka diperoleh fungsi biaya rata-ratanya yaitu AC = aQ + b + c/Q.

Contoh 17. Biaya total yang dikeluarkan oleh produsen dicerminkan oleh persamaan $TC = Q^2 – 6Q + 12$. Pada tingkat berapa unit biaya total minimum. Hitunglah besarnya biaya total dan biaya rata-rata pada tingkat produksi tersebut dan gambarkan.

a. Biaya minimum terjadi pada, $Q = -b/2a \rightarrow Q = +6/2 = 3$ unit. Jadi,

Pada $Q = 3$, $TC_{min} = (3)^2 - 6(3) + 12$

$= 9 - 18 + 12 = 3$

Pada $Q = 3$, biaya rata-rata $AC = (Q^2 - 6Q + 12)/Q$

$= Q - 6 + 12/Q$

$= 3 - 6 + 12/3 = 1$

b. Fungsi biaya total dan fungsi biaya rata-rata (Gambar 6.17b).

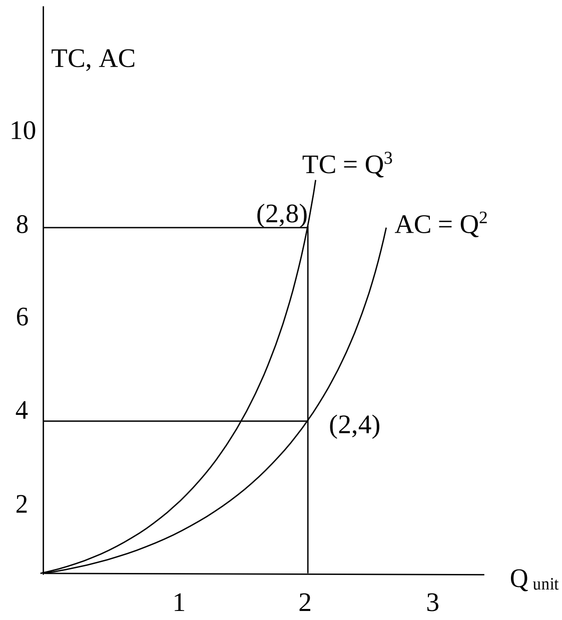
6.7.3 Fungsi Biaya Total: Pangkat Kubik

Bentuk umum fungsi biaya total non linear pangkat tiga (kubik) adalah $TC = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d$. Dimana TC adalah biaya total, Q adalah variabel kuantitas/jumlah barang dan a,b,c,d merupakan konstanta. Dari fungsi tersebut maka diperoleh fungsi biaya rata-ratanya yaitu $AC = aQ^2 + bQ + c + d/Q$.

Contoh 18. Biaya total perusahaan ditunjukkan dalam persamaan $TC = Q^3$. Ditanyakan: a). Pada tingkat berapa unit biaya total minimum, b). Hitunglah besarnya biaya total dan biaya rata-rata pada tingkat produksi Q = 2 unit dan c). Gambarkan.

Dengan menggunakan tabel x dan y yaitu *curva tracing process* diperoleh sebagai berikut:

x	y
-3	-27
-2	-8
-1	1
0	0
1	1
2	8
3	27



Gambar 6.18

a. Buaya pada Q = 0 sehingga TC = Q^1 = 0

b. Pada Q = 2 unit → biaya total TC = Q^3 = (2) = 8

Pada Q = 2 unit → biaya rata-rata AC = TC/Q = Q^3/Q = Q^2

c. Gambar 7.18. Fungsi biaya total (kubik) dan biaya rata-rata

6.7.4 Fungsi Biaya Total: Eksponensial

Pola hubungan fungsional antara variabel biaya total dengan variabel kuantitas barang yang diproduksi dapat juga berbentuk fungsi eksponensial.

Contoh 19. Biaya total yang dikeluarkan perusahaan berbentuk fungsi eksponensial yaitu TC = $20^{0,1Q}$. ($0 \leq Q \leq 11$). Hitunglah besarnya biaya total dan biaya rata-rata pada tingkat produksi Q = 2 dan Q = 10.

a. Biaya total TC = $2^{0,1Q}$

Pada Q = 2, TC = $2e^{0,1(2)}$ = 2,443

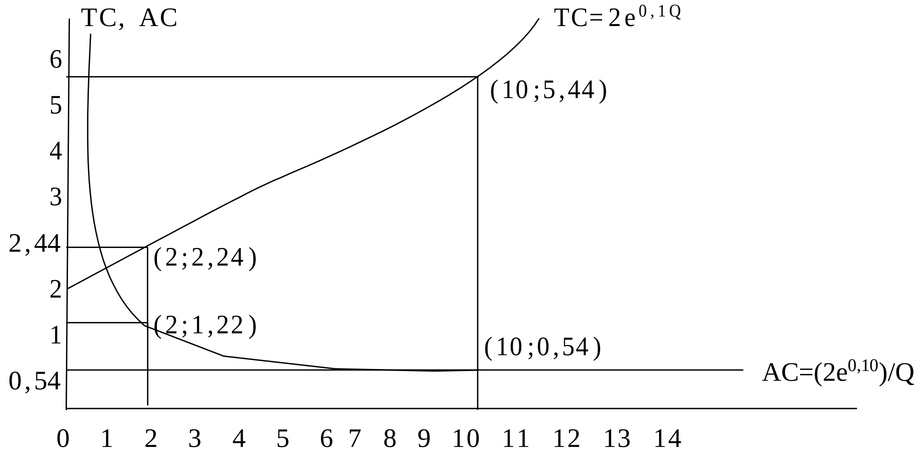
Pada Q = 10, TC = $2e^{0,1(10)}$ = $2e^2$ = 5,436

b. Biaya rata-rata AC = $\frac{2e^{0,1Q}}{Q}$

Pada Q = 2, AC = $[2e^{0,1(2)}]/2 = e^{0,2}$ = 1,221

Pada Q = 10, AC = $[2e^{0,1(10)}]/10 = [e^1]/5$ = 0,544

c. Fungsi biaya total dan fungsi biaya rata-rata (Gambar 6.19)

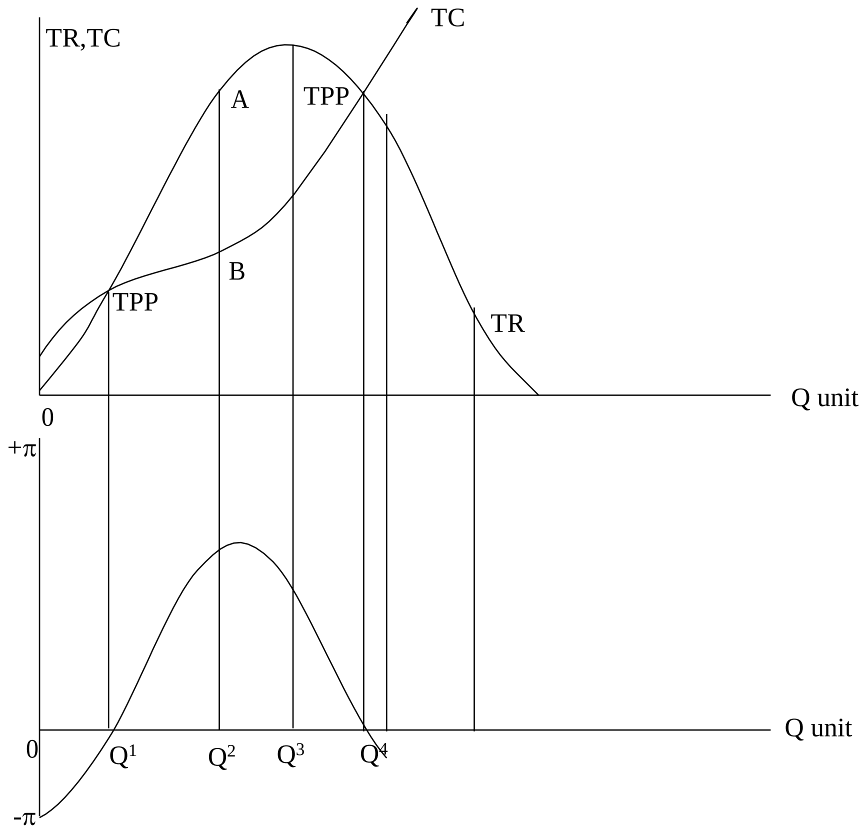


Gambar 6.19 Fungsi Budaya Total (Eksponensial) dan Rata-rata

6.8 FUNGSI LABA-RUGI DAN TITIK PULANG-POKOK

Tidak ada yang lebih menggembirakan bagi seorang produsen daripada diperolehnya harga yang tinggi pada waktu menjual produksinya: pendapatan total yang diperoleh besar dan biaya operasional yang dikeluarkan dapat ditekan serendah-rendahnya. Dengan demikian, pengkajian pada dua parameter ini perlu dilakukan untuk mengetahui kondisi suatu perusahaan: Mendapatkan keuntungan ataukah menderita kerugian.

Secara geometris, analisis laba-rugi dapat dilukiskan pada Gambar 6.20. Dengan tingkat produksi kurang dari Q^1, perusahaan akan mengalami kerugian karena pendapatan yang diterima lebih kecil dibanding dengan pengeluaran total. TR < TC atau $\pi < 0$. Apabila tingkat produksi diperluas hingga sebesar Q^1, perusahaan dikatakan impas (*break-even*) karena pendapatan yang diterima persis sama dengan biaya yang dikeluarkan, TR = TC atau $\pi = 0$.



Gambar 6.20 Fungsi Laba Rugi

Kemudian jika skala produksi diperluas melebihi Q, perusahaan akan menikmati keuntungan karena pada produksi tersebut pendapatan yang diterima lebih besar dari biaya total yang dikeluarkan TR > TC > 0. Besar kecilnya keuntungan ditunjukkan oleh besar kecilnya selisih positif antara kurva TR dan TC. Semakin lebar jarak positif tersebut berarti semakin besar keuntungan yang diterima yaitu terjadi pada tingkat produksi Q Titik A dan B merupakan dua titik yang menunjukkan besarnya laba maksimum yang diterima perusahaan yaitu jika jarak positif terlebar antara kurva TR dan kurva TC mempunyai slope (kemiringan) yang sama besar.

Apabila skala produksi diperluas sampai Q, maka terlihat bahwa TR = TC sehingga $\pi = 0$. Selanjutnya apabila skala produksi diperluas lagi skala produksinya lebih dari Q, maka perusahaan akan menderita kerugian karena ongkos produksinya jauh lebih besar dibandingkan dengan pendapatan yang diterima.

Hal yang perlu difahami adalah bahwa selisih terlebar (positif) antara kurva TR dan kurva TC tidak selalu terjadi pada saat kurva TR, mencapai maksimum dan sebaliknya tidak juga pada kurva TC minimum. Pada tingkat produksi Q pendapatan TR mencapai maksimum tetapi keuntungan maksimum diperoleh pada saat produksi mencapai Q^2.

Secara ringkas, pengkajian analisis laba-rugi dapat ditunjukkan oleh hubungan matematis berikut ini:

$$\pi = TR - TC \qquad 6\text{-}18$$

Jika > 0: perusahaan mendapat keuntungan

Jika < 0: perusahaan menderita kerugian

Tidak kalah penting dari evaluasi laba-rugi adalah mengetahui jumlah produk yang harus dihasilkan untuk melampaui titik impas (*break even point*) atau titik pulang-pokok (TPP). Suatu usaha dikatakan impas bilamana hasil penjualan produknya pada periode tertentu sama dengan jumlah biaya total yang ditanggung sehingga kegiatan usaha tersebut tidak menderita kerugian tetapi juga mendapatkan keuntungan. Jumlah hasil penjualan minimum yang harus dilampaui tadi dapat dihitung dengan menggunakan rumus, sebagai berikut:

$$Q = \frac{FC}{P - AVC} \qquad 6 - 19$$

dimana: Q = jumlah penjualan barang yang harus dicari.

FC = biaya tetap yang ditanggung tiap masa operasi tertentu,

P = harga jual yang direncanakan setiap satuan produk.

AVC = biaya variabel tiap satuan produk.

Contoh 20. Dari seorang pengusaha dapat dicatat bahwa harga barang yang diproduksi dicerminkan oleh persamaan P = 8 – Q, (dimana P adalah harga dan Q jumlah barang yang dijual). Sedangkan biaya rata-rata per unit produk sama besar dengan satu unit produknya (AC-Q). Hitunglah berapa Q yang bisa mendorong pengusaha mencapai laba maksimum.

Diketahui: Pendapatan total, TR = PQ – 8Q – Q^2

Biaya total, TC = AC(Q) = Q^2

Laba, π = TR – TC = (8Q – Q) – Q = 8Q – $2Q^2$

a. Untuk π maksimum diperoleh jika Q = -b/2a = -(8/(-4) = 2 unit

   Pada Q = 2 unit, maka harga P = 8-(2)=6

b. Laba maksimum yang dicapai pada Q = 2 $\rightarrow$8 (2) - $2(2)^2$ = 8.

Contoh 21. Biaya total yang dikeluarkan oleh suatu perusahaan ditunjukkan oleh TC = Q^2 – 400 + 500 dan pendapatan TR = -$2Q^2$ + 52Q. Hitunglah keuntungan dan kerugian perusahaan jika ia memproduksi pada:

a. Tingkat produksi yang menghasilkan pendapatan total maksimum.
b. Tingkat produksi yang menghasilkan biaya total minimum.
c. Tingkat produksi berapa unit keuntungan maksimum akan dicapai.
d. Bagaimana kesimpulan.

Diketahui: TR = -$2Q^2$ + 52Q dan TC = Q^2 – 40Q + 500

a. Untuk TR maksimum, terjadi pada Q = -b/2a = -52/-4 = 13 unit. Jadi,

   $TR_{maksimum}$ = $-2(13)^2$ + 52(13) = -338 + 676

   = 338

   Biaya totalnya adalah TC = $(13)^2$ – 40(13) + 500

   = 169 – 520 + 500 = 149

   Jadi, laba (pada Q = 13 unit) sebesar π = TR – TC = 338 – 149 = 189

b. Untuk TC minimum, terjadi pada Q = -b/2a = 40/2 = 20 unit. Jadi,

   $TC_{minimum}$ = $(20)^2$ – 40(20) + 500

   = 400 – 800 + 500

= 100

Pendapatan total = TR – 2(20) + 52(20)

= -800 + 1.040 = 240

Jadi, laba pada (pada Q 20 unit) sebesar π = TR – TC = 240 – 100 = 140

c. Fungsi laba: π = TR – TC = (-20 + 52Q) – (Q^2 – 400 + 500)

= -3Q^2 + 920 – 500

Jadi, laba maksimum, terjadi pada Q = -b/2a = 92/-6 = 15,33. Jadi,

$\pi_{maksimum}$ = -3$(15,33)^2$ + 92(15,33) – 500

=-705,03 + 1.410,36 – 500

= 205,33

d. Kesimpulan: Untuk mendapatkan keuntungan maksimum, maka perusahaan harus memproduksi pada tingkat Q = 15,33 unit karena laba yang akan diperoleh akan lebih besar dibandingkan dengan berproduksi pada tingkat pendapatan TR maksimum (Q = 13 unit) maupun pada tingkat produksi biaya TC minimum (Q = 20 unit).

Contoh 22. Pendapatan total yang diterima perusahaan dinyatakan dalam persamaan TR = 400Q dan biaya yang dikeluarkan TC = 300Q + 10.000. (a) Pada tingkat produksi berapa unit perusahaan pada posisi impas (pulang-pokok). (b) Hitunglah laba-rugi jika perusahaan tersebut memproduksi sebanyak Q = 50 unit dan Q = 200 unit dan dan tunjukkan dalam gambar.

a. Syarat pulang-pokok : $\pi = 0 \rightarrow$ TR = TC

400Q = (300Q + 10.000)

100Q = 10.000 $\rightarrow$ Q = 10.000/100 maka Q = 100 unit

b. Pada Q = 50 unit, π = 100Q – 10.000 = 100(50) – 10.000

= 5.000 – 10.000

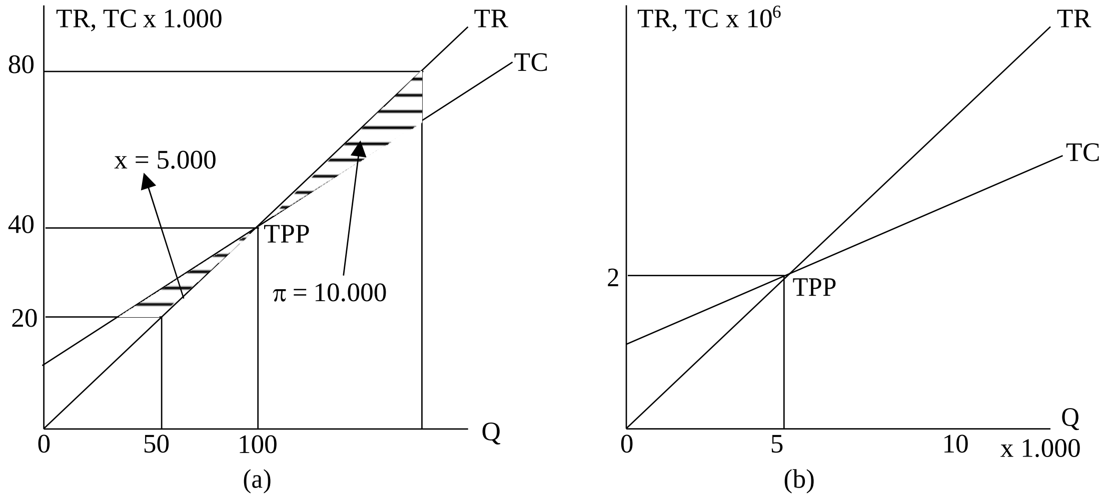
= -5.000 (mengalami kerugian)

Pada Q = 200 unit, π = 10Q – 10.000 = 100(200) – 10.000

= 20.000 -10.000

= 10.000 (laba)

c. Titik pulang-pokok dilukiskan ada Gambar 6.20a.



Gambar 6.20 Titik Pulang Pokok

Contoh 23. Jumlah biaya tetap suatu perusahaan tiap tahun sebesar 1 juta rupiah, biaya variabel tiap satuan produk Rp 200.- sedangkan harga jual tiap satuan produk direncanakan Rp 400,- (a) Hitunglah berapa jumlah penjualan minimum yang harus dicapai tiap tahun dan (b) Tunjukkan dalam gambar.

Cara I: Jumlah penjualan minimum yang harus dicapai:

$$Q = \frac{FC}{P - AVC} = \frac{1.000.000}{400 - 200}$$

= 5.000 unit

atau Rp 2 juta [400 x (5.000)], hanya jika setiap tahun dapat menjual produk di atas Rp 2 juta maka perusahaan akan menghasilkan laba.

Cara II:

a. AVC = 200 $\rightarrow$ VC = AVC(Q) – 200Q dan FC = 1.000.000. Jadi,

Biaya total, TC = FC + VC = 1.000.000 + 200Q

Pendapatan soal, TR = P . Q = 400Q

Syarat pulang pokok $\pi = 0 \rightarrow$ TR = TC

400Q = 1.000.000 + 200Q $\rightarrow$ 200Q = 1.000.000

Q = 1.000.000/200

Q = 5.000

Jadi penjualan minimum sebanyak Q = 5.000 unit.

b. Tink pulang pokok dilukiskan pada Gambar 6.20b.

Contoh 24. Suatu perusahaan menjual produknya seharga Rp 4.000 unit, biaya variabel per unit produksi 15% dari harga penjualan dan biaya tetap Rp 850.000 Ditanyakan (a) Berapa unit produksi pulang-pokok, (b) Berapa laba jika yang terjual sebanyak 300 unit dan (c) Berapa unit produk pulang-pokok jika harga jualnya naik menjadi Rp 4.200

a. Pendapatan total TR = 4.000Q dan biaya variabel per unit AVC = 15% x 4.000 = 600. Jadi,

Biaya variabel VC = AVC(Q) = 600Q

Biaya tetap FC = 850.000 sehingga biaya totalnya adalah:

TC = PC + VC = 850.000 + 600Q

Pulang-pokok: TR = TC

4.0000 = 850.000 + 600Q

3.400Q = 850.000 – Q = 850.000/3.400 = 250 unit

b. Pada Q = 300 unit, π = TR – TC = 4.000Q – (850.000 + 6000)

= 4.000(300) – 850.000 – 600(300)

= 1.200.000 – 850.000 – 180.000

= 170.000

c. Harga naik menjadi P = 4.200 maka TR – PQ = 4.200Q

Biaya variabel per mit AVC 15% x 4200 – 630

biaya variabel VC = AVC(Q) = 630Q

biaya tetap FC = 850.000 (tidak berubah) sehingga

TC = FC + VC = 850.000 + 6300

Pulang pokok: TR = TC

4.200Q – 850.000 + 6300

35700 – 850.000 $\rightarrow$ Q = 850.000/3.570 = 238 unit

Contoh 25. Saat perusahaan menjual produknya seharga Rp 700 per unit biaya variabel tetap 98.000 rupiah dan biaya variabel rata-rata = 20% dari harga penjualan. Ditanyakan: a. Berapa unit produksi pulang pokoknya, b. Berapa unit barang yang harus diproduksi jika perusahaan mengharapkan laba sebesar Rp 126.000,- dan c.

Berapa unit barang yang diproduksi bila ternyata mengalami kerugian sebesar 2.800 rupiah.

a. Pendapatan total TR = P . Q = 700Q

   Biaya tetap FC = 98.000

   Biaya variabel rata-rata AVC = 20% x 700 – 140 – VC = 140Q

   Biaya total TC = 98.000 – 140Q

   Syarat pulang-pokok TR = TC

   700Q = 98.000 + 140Q

   560Q – 98.000 → Q = 98.000/560 = 175 unit

b. Perusahaan mengharapkan laba x= 126.000. Jadi,

   π = TR – TC → 126.000 = 700Q – (98.000 + 1400)

   224.000 = 560Q → Q = 224.000/560

   Q = 400 unit

c. Perusahaan mengalami kerugian sebesar = -2.800 jadi:

   π = TR – TC → 2.800 = 700Q – (98.000 + 140Q)

   95.200 = 560Q → Q = 95.200/560

   Q = 170 unit

6.9 FUNGSI UTILITAS

Fungsi utilitas dinyatakan sebagai U = f(Q) dimana U adalah utilitas total dan Q merupakan barang atau jasa yang dapat mengkombinasikan sehingga diperoleh tingkat utilitas yang maksimum. Secara umum fungsi utilitas dituliskan sebagai:

$$U = f(Q_1. Q_2, \ldots\ldots, Q_h) \qquad 6\text{-}20$$

Utilitas total U merupakan fungsi dari jumlah barang atas jasa yang dikonsumsi. Jika hanya ada satu barang atau jasa yang dikonsumsi, sementara konsumsi-konsumsi yang lain tetap, maka fungsi utilitas dapat dinyatakan dalam bentuk U = f(Q).

Tambahan utilitas (kepuasan konsumen) berkenaan dengan adanya tambahan satu unit input variabel sering disebut *Marginal Utility* atau (MU). Secara matematis ditunjukkan oleh:

$$\mathrm{MU} = \frac{\Delta \mathrm{U}}{\Delta \mathrm{Q}} \qquad 6-21$$

Contoh 26. Kepuasan seorang konsumen dari mengkonsumsi suatu barang ditunjukkan oleh fungsi utilitas U-3Q¹ + 60Q, dimana (U tingkat kepuasan dan Q barang yang dikonsumsi). Ditanyakan a). Berapa unit barang harus dikonsumsi bila ia ingin memaksimumkan tingkat kepuasan atas barang itu. Hitung nilai utilitas maksimum tersebut. b). Apa yang terjadi bila konsumen tadi ingin mengkonsumsi satu unit lagi barang tersebut.

a. Fungsi utilitas $U=-3Q^2+60Q$

   U akan maksimum pada tingkat konsumsi

   $Q = -b/2a=-(60)/2(-3)$

   $= 10$ unit

   Jadi, U maksimum $=-3(10)^2 + 60(10) = -300 + 600 = 300$

b. Pada Q = 10 unit → U = 300

   Jika $Q = 10 + \Delta Q =11$ unit, maka $U = -3(11)^2 + 60(11)$

   $= -363 + 660 = 297$

$$\text{MU } = \frac{\Delta \text{U}}{\Delta \text{Q}} = \frac{297 - 300}{11 - 100} = -3$$

6.10 FUNGSI ANGGARAN

Fungsi anggaran, yang dibahas dalam pasal ini terdiri dari dua macam teori, yaitu: Teori Konsumen dan Teori Produsen. Pada teori konsumen, fungsi anggaran dikenal dengan istilah garis anggaran (*budge-line*). Garis anggaran, menggambarkan kombinasi yang berbeda dari dua macam produk atau lebih yang dapat dibeli dengan sejumlah uang tertentu. Dengan arti lain, garis anggaran mencerminkan batas maksimum kemampuan konsumen dalam membeli dua macam atau lebih output berkaitan dengan tingkat pendapatan dan harga masing-masing produk.

Dalam analisis fungsi anggaran, nilai dan pendapatan individual pada awalnya dianggap konstan, hanya kombinasi yang berbeda dari produk yang diizinkan berubah. Fungsi tersebut kemudian dapat digambarkan dalam grafik dengan menyatakan satu variabel menurut variabel lain.

Secara matematis, fungsi anggaran dapat diturunkan dalam hubungan berikut ini:

$B = x – P_1 + y\ P,$ 6-22

Dengan mengatur kembali suku-suku pada ruas kanan selanjutnya,

$y\ .\ P_y = B – x – P_x \rightarrow y = (B – x\ -Px)/P_y$

$$y = \frac{B}{P_y} - \frac{B}{P_y}x \qquad 6-23$$

di mana: B = pendapatan konsumen

y = jumlah output barang y

x = jumlah output barang x

P_y = harga output barang y per unit

P_x = harga output barang x per unit

Rumus 7-23 yang ditunjukkan di atas tidak lain merupakan bentuk fungsi linear y = b + ax. dengan konstanta (*intercept*) b = (B/P,) dan derajat kemiringan (*slope*) a = -(P/P).

Pada teori produsen, fungsi anggaran dikenal dengan nama garis isocost (*isocost-line*). Suatu garis isocost, menggambarkan kombinasi yang berbeda dari dua input atau faktor produksi yang dapat dibeli dengan sejumlah uang tertentu. Dengan demikian garis isocost merupakan batas maksimum kemampuan produsen/perusahaan dalam pengeluaran masing-masing input atau faktor produksi dan harga-harga inputnya.

Fungsi anggaran (garis isocost) dapat diturunkan dari rumus 6-23 dalam bentuk lain yaitu:

$E = x – P_1 + y – P_y$ 6-24

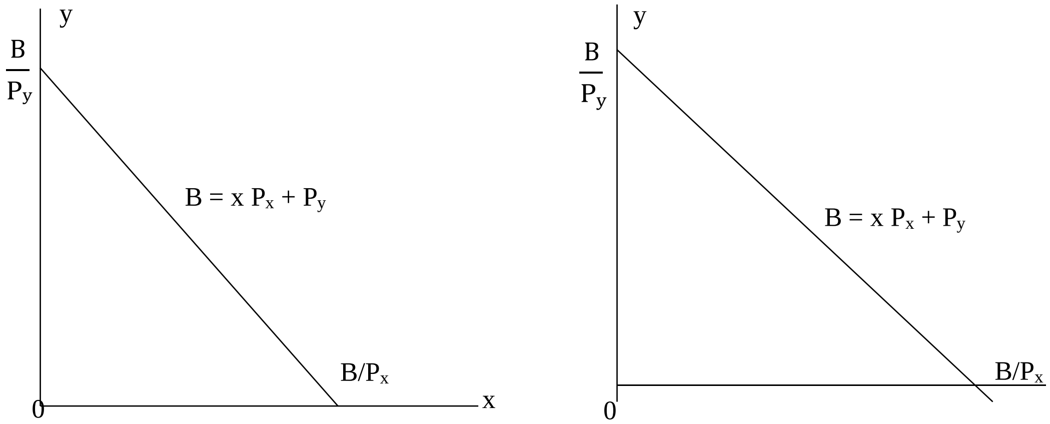
di mana: E = pengeluaran (*expenditure*)

y = jumlah input barang y

x = jumlah input barang x

P_y = harga input barang y per unit

P_x = harga input barang x per unit



a. Garis Anggaran (*budge-line*) a. Garis isocost (*isocost-line*)

Gambar 6.21 Fungsi Anggaran.

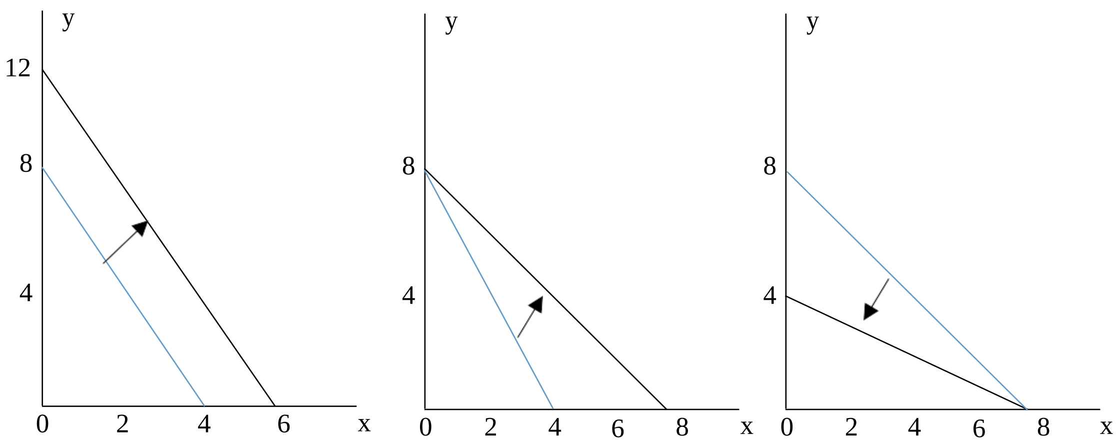
Contoh 27. Seseorang mempunyai uang sebesar 24.000 rupiah untuk membeli dua macam produk (x,y) yang masing-masing berharga 6000 rupiah dan 3.000 rupiah.

a. Gambarkan garis anggaran yang menunjukkan semua kombinasi yang berbeda dari dua barang yang dapat dibeli dengan anggaran 24.000 rupiah tersebut,
b. Jika anggaran tersebut dinaikkan sebanyak 50%, bagaimana yang terjadi pada garis anggaran,
c. Jika harga x diturunkan menjadi 3.000 rupiah dan
d. Harga y dinaikkan menjadi 6.000 rupiah.

a. Diketahui P_x = 6.000; Py = 3.000 dan B 24.000

Fungsi anggaran B = x.Px + y.Py $\rightarrow$ 24.000 = 6.000x + 3.000y

Dalam bentuk y = (24.000/3.000) – (6.000/3.000) x atau y = 8 – 2x



(a). Anggaran dinaikkan (b). Penurunan harga Px (c). Kenaikan Harga Py

Gambar 6.22

b. Jika anggaran dinaikkan sebesar 50%, maka anggaran yang baru menjadi 24.000 (1 + 0,5) = 36.000. Jadi,

$36.000 = 6.000x + 3.000y \rightarrow y = 12 - 2x$

Kenaikan anggaran menyebabkan garis anggaran bergeser sejajar ke kanan (Gambar 6.22a)

c. Jika P, turun menjadi 3.000, maka fungsi anggaran semula menjadi,

24.000 = 3.000x + 3.000y atas y = 8 – x

Penurunan harga x menyebabkan kemiringan garis anggaran lebih landai. Dengan harga yang lebih rendah (2 kali lipat) yang dapat dibeli menjadi dua kali lipat lebih banyak (Gambar 6.22b).

d. Jika P, naik menjadi 6.000, maka fungi anggaran semula menjadi,

24.000 = 6.000x + 6.000 atau y = 4 – x

Kenaikan harga y menyebabkan keminsgan garis anggaran lebih landai. Dengan harga y yang lebih tinggi muka y yang dapat dibeli, menjadi lebih sedikit (Gambar 6.22c).

Contoh 28. Pendapatan seorang konsumen rata-rata sebesar Rp. 600.000,-. (a) Bagaimana persamaan anggaran jika diketahui harga barang x Rp. 300,- per unit dan harga barang y sebesar Rp. 200-per unit; (b) Jika konsumen membeli barang x sebanyak 1000 unit, berapa unit barang y yang dapat dibeli dan (c) Hitunglah berapa unit yang diperoleh jika konsumen membelanjakan seluruh pendapatan pada barang y.

a. Diketahui P, = 300 dan P_y = 200

Fungsi anggarannya: $B = x\,P_x + y\,P_y$

b. Pada x = 1.000 unit, maka $y = \frac{B - x.P_x}{P_y} = \frac{600.000 - (1.000)300}{200}$

$= 1.500$ unit

c. Jika dibelanjakan seluruhnya untuk barang y, maka haruslah x = 0.

$$\text{Jadi}, y = \frac{B - x.P_x}{P_y} = \frac{600.000 - 0.300}{200} = 600.00/200$$

$= 3.000$ unit

6.11 FUNGSI KONSUMSI DAN FUNGSI TABUNGAN

6.11.1 Fungsi Konsumsi

Salah satu komponen penting Pendapatan Nasional (Y) adalah konsumsi (*consumption* atau C). Fungsi konsumsi adalah sebuah fungsi yang menghubungkan laju pengeluaran konsumsi dengan tingkat pendapatan nasional. Namun demikian, tidak seluruhnya pendapatan itu dibelanjakan untuk keperluan konsumsi, melainkan sebagian akan ditabung. Makin tinggi pendapatan nasional makin tinggi pula pengeluaran untuk belanja konsumsi. Dengan demikian pengeluaran konsumsi ini akan berubah-ubah sesuai dengan naik turunnya jumlah pendapatan. Karena alasan-alasan inilah maka fungsi konsumsi merupakan fungsi dari pendapatan yaitu, C = f(Y).

Secara matematis, fungsi konsumsi sering ditulis secara linear sebagai,

$$C = C_2 + bY \qquad 6 - 25$$

di mana C, dan b suatu konstanta.

Dalam ilmu ekonomi, konstanta C, menunjukkan konsumsi otonom (*autonomous consumption*) karena ia mencerminkan tingkat konsumsi apabila pendapatan Y = 0. Secara grafis, konstanta C merupakan penggal kurva konsumsi pada sumbu vertikal. Sedangkan b (kemiringan $\Delta C/\Delta Y$) tidak lain adalah kecenderungan marginal untuk mengkonsumsi (*Marginal Propensity to Consume* atau MPC) karena ia mengukur perubahan konsumsi yang diakibatkan oleh perubahan satu unit pendapatan, atau

$$b = \text{MPC} = \frac{\Delta C}{\Delta Y} \qquad 6 - 26$$

6.11.2 Fungsi Tabungan

Pendapatan yang tidak dibelanjakan untuk keperluan konsumsi akan diwujudkan dalam bentuk tabungan (*saving*). Namun demikan tabungan ini bukanlah suatu konsep sisa, melainkan suatu “pilihan” antara membelanjakannya atau tidak meskipun pada hakekatnya demikian.

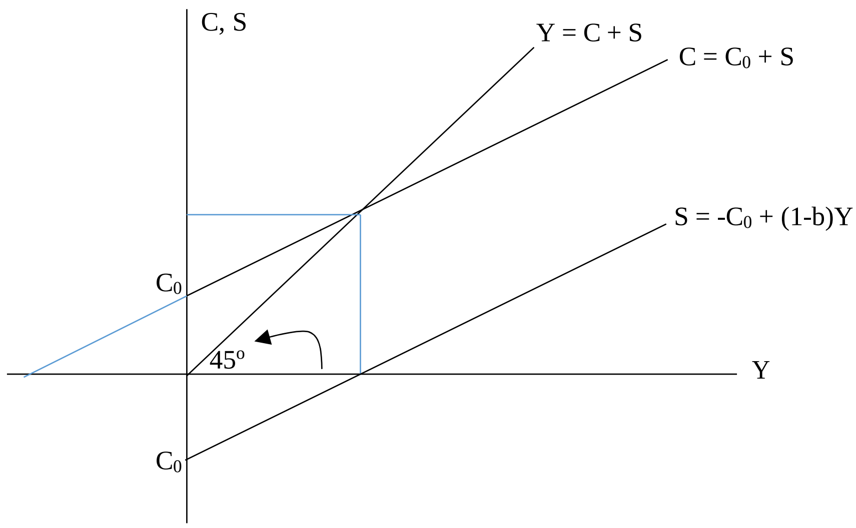
Seperti halnya dengan fungsi konsumsi, maka fungsi tabungan diduga berkaitan erat dengan pendapatan nasional. Berdasarkan kesamaan Y = C + S dan C = C_0 + bY, maka secara matematis fungsi tabungan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$S = Y - C \qquad 6 - 27$$

Perilaku tabungan ini, disamping berkaitan erat dengan pendapatan nasional, juga dipengaruhi oleh tingkat suku bunga. Meskipun hal ini belum teruji benar S = f(I,Y). Dengan mengatur kembali rumus 6-27 dan mensubstitusikan fungsi konsumsi, diperoleh

$S = Y - (C_2 + bY)$

$$S = -C_2 + (1 - b)Y \qquad 6 - 28$$



Gambar 6.23 Fungsi Konsumsi dan Tabungan

Pada fungsi tabungan, konstanta $-C_0$ menunjukkan tabungan otonom (*autonomous saving*) yang mencerminkan suatu tingkat konsumsi yang terjadi tanpa bergantung pada pendapatan atau ketika pendapatan Y = 0. Sedangkan 1-b (kemiringan AC/AY) tidak lain adalah kecenderungan marginal untuk menabung (*Marginal Propensity to Save* atau MPS) karena ia mengukur perubahan dalam hubungan berkaitan dengan perubahan satu unit pendapatan:

$$1 - b = \mathrm{MPS} = \frac{\Delta S}{\Delta Y} \qquad 6 - 29$$

sehingga diperoleh: MPC + MPS = 1

Konsep lain yang sangat berpengaruh terhadap pendapatan nasional berkaitan dengan konsumsi dan tabungan adalah efek pelipatan/pengganda (*multiplier efect* atas k) Multiplier adalah suatu bilangan yang menjelaskan besarnya perubahan terhadap pendapatan nasional yang diakibatkan berubahnya beberapa variabel dalam sektor-sektor perekonomian. Besarnya multiplier dapat ditentukan dari rumus di bawah ini:

$$k = \frac{1}{1 - \mathrm{MPC}} = \frac{1}{1 - b} \qquad 6 - 30$$

Faktor 1/(1-b) disebut multiplier. Bilangan ini mengukur efek ganda dari tiap rupiah pengeluaran otonom (*otonomous spending*) terhadap keseimbangan pendapatan nasional. Oleh karena b = MPC dan MPC + MPS= 1, maka multiplier dapat juga dihitung dari bentuk 1/MPS.

Contoh 29. *Autonomous consumption* masyarakat diketahui sebesar 100 sedangkan MPC-nya = 0,6. Bagaimana bentuk fungsi konsumsi dan fungsi tabungannya. Hitunglah besarnya konsumsi dan tabungan jika pendapatan nasionalnya sebesar 24.000.

a. Diketahui C, = 100 dan MPC = 0,6. Jadi,

Fungsi konsumsinya $C = C_1 + (MPC)Y = 100 + 0{,}6Y$

Fungsi tabungan $S = Y – C = Y – (100 + 0{,}6Y)$

$= -100 + (1 – 0{,}6)Y$

$= -100 + 0.4Y$

b. Pada Y = 24.000, maka $C = 100 + 0{,}6(24.000) = 100 + 14.400$

$= 14.500$

dan $S = -100 + 0{,}4(24.000) = 100 + 9.600$

$= 9.500$

6.12 PENDAPATAN DISPOSABEL

Pendapatan disposabel (*disposable income* atau Y_d) adalah pendapatan nasional yang secara kongkrit dapat dibelanjakan oleh masyarakat (minus pendapatan pemerintah). Dalam hal tidak ada pengaruh pajak (*tax* atau T) dan pembayaran alihan (*transfer payment* atau R), besarnya pendapatan disposabel persis sama dengan pendapatan nasional Y. Kenyataan sesungguhnya, pendapatan disposabel inilah yang merupakan variabel bebas sebagai fungsi konsumsi. Dengan demikian bentuk fungsi konsumsi adalah:

$$C = C_2 + bY_d \qquad 6\text{-}31$$

dan fungsi tabungannya menjadi $S = Y_d – C$. Adanya pembebanan pajak yang diterima pemerintah maupun pembayaran alihan yang akan dibayarkan pada masyarakat, maka pendapatan disposabel dapat ditulis sebagai:

$$Y_1 = Y – T + R \qquad 6\text{-}32$$

Pengaruh pajak yang dibebankan pada masyarakat dapat dibedakan menjadi 2 (dua) macam yaitu pajak *lamp-sum* yang besarnya tertentu dan tidak tergantung pada pendapatan (*autonomous tax* atau T_0) dan pajak yang besarnya dintetukan proporsional terhadap tingkat pendapatan tY.

Secara umum besarnya pajak yang diterima pemerintah dapat dituliskan sebagai berikut:

$$T = T_1 + tY \qquad 6\text{-}33$$

Kurva fungsi pajak berupa garis lurus (fungsi linear) dengan kemiringan (*slope*) sebesar $t = \Delta T/\Delta Y$ dan berawal dari penggal T, sumbu vertikal.

Contoh 29. Fungsi konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan oleh persamaan $C = 200 + 0{,}7Y_d$. Jika pemerintah menerima pembayaran pajak sebesar 35 dari masyarakat dan memberikan pembayaran alihan kembali sebesar 15, hitunglah besarnya konsumsi pada saat pendapatan nasional sebesar 1.000.

Diketahui $C = 200 + 0{,}7Y_d \rightarrow C = 200 + 0{,}7\ (Y – T + R)$

$= 200 + 0{,}7(Y – 15 + 35)$

$= 214 + 0{,}7Y$

Pada Y= 1.000, maka C = 214 + 0,7(1.000) = 214 + 700 = 914

Contoh 30. Fungsi konsumsi ditunjukkan oleh persamaan $C = 900 + 0{,}7Y_d$. Jika pemerintah menerima pajak sebesar T = 30 + 0,01Y dari masyarakat dan memberikan pembayaran alihan sebesar 30. (a) Hitunglah besar pendapatan disposabel jika pendapatan nasionalnya 9.000 dan hitunglah besarnya konsumsi, tabungan dan pajak total.

a. $Y_1 = Y – T + R = 9.000 – (30 + 0{,}01Y) + 30$

$= -9.000 – 30 – 0{,}01(9.000) + 30$

$= -9.000 – 90 – 8.910$

b. Pada $Y_d = 8.910$, maka $C = 900 + 0{,}7Y, 900 + 0{,}7(8.910)$

$= 900 + 6.237 = 7.137$

dan $S = Y_d – C = 8.910 – 7.137$

$= 1.773$

Pada Y= 9.000, maka $T = 30 + 0{,}01Y = 30 + 0{,}01(9.000)$

$= 30 + 90 = 120$

6.13 FUNGSI INVESTASI

Investasi (*Investment* atau 1) pembentukan modal adalah tambahan pada barang modal. Investasi ini dimungkinkan karena masyarakat tidak seluruhnya mengkonsumsi semua barang yang diproduksi. Faktor-faktor yang menentukan besar kecilnya investasi ini antara lain banyak dikaitkan dengan pendapatan nasional. Makin tinggi pendapatan nasional makin tinggi pula pengeluaran konsumsi. Pengeluaran konsumsi semakin tinggi, akan memerlukan barang-barang mdal yang lebih banyak pula. Akibatnya iklim investasi akan dirancang (*induced investment*) oleh pertambahan pendapatan nasional. Sedangkan investasi yang tidak dipengaruhi oleh faktor pendapatan nasional melainkan dipengaruhi oleh faktor-faktor lain disebut investasi yang otonom (*autonomous investment* atau l_0).

Hubungan fungsional antara investasi dan pendapatan nasional dapat dirumuskan dengan persamaan:

$$I = I_0 + aY \qquad 6 – 34$$

di mana a adalah proporsional investasi terhadap pendapatan nasional.

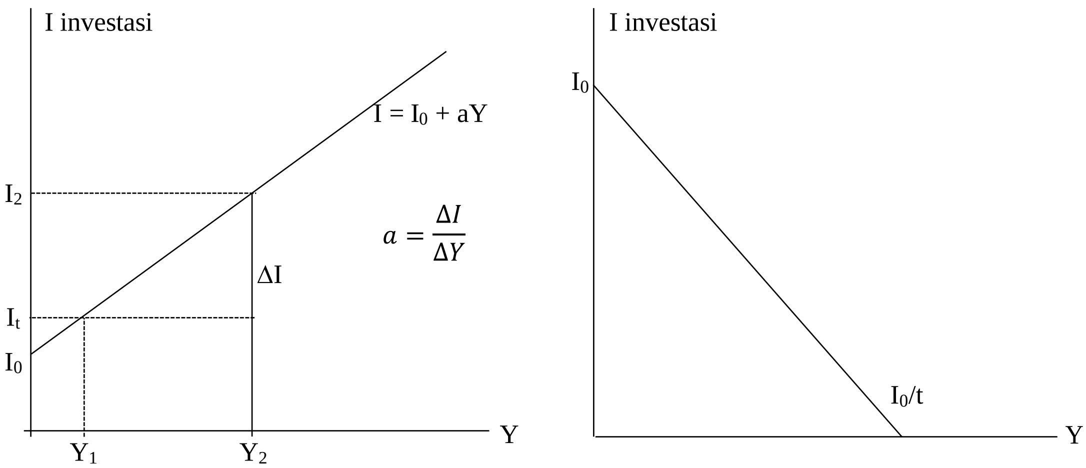
Tingkah laku investasi ini ternyata erat dengan tingkat suku bunga i. Pada hubungan permintaan investasi 1 dengan tingkat suku bunga I diprepresentasikan dalam bentuk:

$$I = I_0 – ri \qquad 6 – 35$$

di mana: I_0 = investasi otonom

i% = tingkat suku bunga (per tahun)

r = proporsional investasi terhadap suku bunga,



(a) Investasi fungsi pendapatan (b) Investasi fungsi suku bunga

Gambar 6.24 Fungsi Investasi

Fungsi investasi di atas merupakan fungsi permintaan akan investasi yang dapat dijelaskan yaitu: Semakin tinggi tingkat suku bunga maka semakin kecil permintaan akan investasi atau sebaliknya. Apabila suku bunga tinggi orang akan cenderung menyimpan uangnya di bank daripada menginvetasi dalam bentuk usaha, akibatnya iklim investasi lesu. Sebaliknya apabila tingkat suku bunga rendah orang akan berbondong-bondong menanam uangnya dalam bentuk investasi. Akibatnya dunia investasi semakin ramai.

Contoh 31. Fungsi permintaan akan investasi suatu negara dicerminkan oleh persamaan 1 = 1.500 – 3.000. Berapa besarnya investasi pada saat tingkat suku bunga sebesar 10% per tahun dan 20% per tahun.

Diketahui: 1 = 1.500 – 3.000

Pada i = 10%, maka besarnya investasi adalah

$$I = 1.500 - 3.000(0,10) = 1.500 - 300 - 1200$$

Pada i = 20%, maka besarnya investasi adalah:

$$I = 1.500 - 3.000(0,20) = 1.500 - 600 - 900$$

Terlihat, adanya kenaikan tingkat suku bunga menyebabkan tingkat investasi akan menurun.

Contoh 32. (a) Carilah bentuk yang diturunkan dari model pendapatan nasional dari perekonomian dua sektor Y = C + I, dimana fungsi konsumsi dicerminkan oleh persamaan C = C, + bY, dan investasi nasional I = 1, serta adanya penerimaan pajak sebesar 50. (b) Hitunglah tingkat keseimbangan pendapatan nasional jika diketahui : $C_1 = 750$, b = 0,5, a = 0,4 $I_0 = 250$ dan $T = T_1$. (c) Berapakah nilai multipliernnya.

a. Pendapatan nasional yang diturunkan dari model:

$$Y = C + I$$
$$= C_2 + bY_1 + I_0$$
$$= C_2 + b(Y - T_0) + I_0$$
$$Y - bY = C - bT_0 + I_0$$
$$Y = \frac{C_0 - bT_0 + I_0}{(1 - b)}$$

b. Jika model yang diturunkan dapat ditemukan, maka perhitungan pendapatan nasional dapat dicari:

$$Y = \frac{C_0 - bT_0 + I_0}{(1 - b - a)} = \frac{750 - 0{,}5(50) + 250}{(1 - 0{,}5 + 0{,}4)} = 9.750$$

c. Pada b = 0,5 angka multiplier adalah 1/(1-b) = 2

Contoh 33. Seperti contoh-32, fungsi konsumsi $C = C_0 + by$, dan investasi merupakan fungsi pendapatan nasonal $I = 1_0 + aY$. Penerimaan pajak pemerintah sebesar 50. (a) Carilah pendapatan nasional dari model yang diturunkan, (b) Hitunglah tingkat keseimbangan pendapatan nasional dan (c) Tunjukkan apa yang terjadi pada efek multiplier.

a. Pendapatan nasional yang diturunkan dari model:

$$Y = C + I$$
$$= C_2 + bY + L + aY$$
$$= C_2 + b(Y - T_0) + I_0 + aY$$
$$Y - bY - aY = C_1 - bT. + I_0$$
$$Y = \frac{C_0 - bT_0 + I_0}{(1 - b - a)}$$

b. Jika model yang diturunkan dapat ditemukan, maka perhitungan pendapatan nasional dapat dicari:

$$Y = \frac{C_0 - bT_0 + I_0}{(1 - b - a)} = \frac{750 - 0{,}5(50) + 250}{(1 - 0{,}5 + 0{,}4)} = 9{,}750$$

c. Karena investasi merupakan fungsi pendapatan nasional dan tidak lagi otonom, maka akan menaikkan nilai multiplier. Multiplier berubah dari 1/(1-b) = 2 menjadi 1/(1-b-a) = 10 untuk b= 0,5 dan a = 0.4.

Contoh 34. Perekonomian tiga sektor dengan konsumsi nasional dicerminkan oleh persamaan C = 300 juta + $0{,}35Y_d$ dan jumlah investasi sebesar 200 juta rupiah serta pengeluaran pemerintah 150 juta rupiah (a). Cari pendapatan nasional dan (b) Hitunglah pendapatan nasional yang baru jika terdapat tambahan investasi sebesar 10 juta rupiah.

a. Karena tidak ada pajak dan pembayaran alihan maka $Y_d = Y$

$$Y = C + I + G$$
$$= 300 \text{ juta} + 0{,}35Y, + L + G$$
$$= 300 \text{ juta} + 0{,}35Y + 200 \text{ juta} + 150 \text{ juta}$$

$Y - 0{,}35Y = 650$ juta

$0.65Y = 650$ juta

$Y = 1$ milyar

b. Pendapatan nasional yang baru dapat dicari dengan memasukkan nilai investasi yang baru I = (1_0 + 10 juta = 210 juta) atau dengan menggunakan efek multiplier

Cara I : $Y = C + I + G$

$= 300 \text{ juta} + 0{,}35Y_d^1 + (I_0 + \Delta I) + G_0$

$= 300 \text{ juta} + 0{,}35Y^1 + 200 \text{ juta} + 150 \text{ juta}$

$Y - 0{,}35Y = 660$ juta

$0.65Y = 660$ juta

$Y = 1{,}015385$ milyar

Cara II : $Y^1 = Y + \Delta Y$

$$= \frac{C_0 + (I_0 + \Delta I) + G_0}{(1 - b)}$$

$$= \frac{C_0 + I_0 + G_0}{(1 - b)} + \frac{\Delta I}{(1 - b)}$$

$$= 1 \text{ milyar} + \frac{10\text{juta}}{1 - 0{,}35} = 1\text{milyar} + 15{,}385 \text{ juta}$$

$= 1{,}015385$ milyar

6.14 FUNGSI PENDAPATAN NASIONAL

Apa yang diterangkan mengenai pendapatan nasional di atas baru pada aras dasar. Ternyata tidaklah semudah itu kita menentukan tingkat pendapatan nasional. Apabila diperluas lagi, pendapatan nasional merupakan agregat dari pendapatan semua sektor seperti sektor rumah tangga (C), sektor badan-badan usaha (1), sektor pemerintah (G) maupun selisih dari sektor perdagangan internasional ekspor dan impor (X – M).

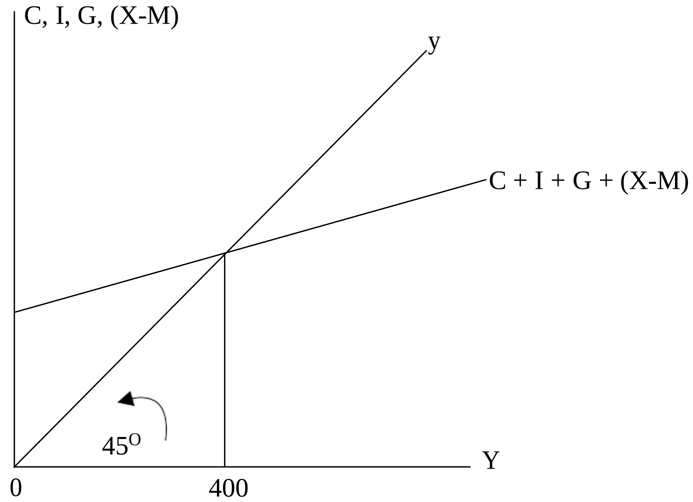
Model penentuan pendapatan nasional umumnya menyatakan keseimbangan pendapatan (*equilibrium level of income*) dalam suatu perekonomian beberapa sektor. Keseimbangan pendapatan nasional ini dapat diterangkan dengan menggunakan fungsi-fungsi di bawah ini.

$$Y = C + I + G + (X - M) \qquad 7\text{-}36$$

Pendapatan nasional yang seimbang tidak lain adalah suatu tingkat pendapatan nasional yang setiap kali ada gangguan (naik/turum) yang disebabkan oleh kekuatan-kekuatan tawar-menawar, maka pendapatan nasional tersebut cenderung kembali pada titik keseimbangan semula.

Untuk mendapatkan tingkat keseimbangan pendapatan tersebut, buatlah garis putus-putus yang membentuk sudut 45^o dari titik asal. Bentuk garis ini tidak lain adalah sebuah garis lurus fungsi linear (y = x). Jika fungsi agregatnya memotong garis putus-putus, maka permintaan agregat akan sama dengan pendapatan nasionalnya. Pada tingkat yang lebih lanjut, diketahui bahwa garis C + I + G + (X – M) adalah *agregat demand* sedangkan garis putus-putus 45^o ini merupakan *agregat supply*.

Secara geometis, tingkat keseimbangan dapat dicari dari titik perpotongan jumlah sektor-sektor C + I + G + (X – M) yang direncanakan untuk berbagai tingkat pendapatan nasional Y. Dari Gambar 7.25, tampak bahwa tingkat keseimbangan pendapatan nasional adalah 400, karena fungsi permintaan agregat C + I + G + (X – M) memotong garis 45^o pada Y = 400.



Gambar 6.25 Model Penentuan Kesimbangan Pendapatan Nasional.

Contoh 35. Pendapatan nasional dua sektor diberikan oleh Y = C + I Carilah: (a) Model pendapatan nasional yang diturunkan, (b) Berapakah pendapatan nasional: jika pajak pendapatan proporsional dimasukkan dalam model dan (e) Tidak memasukkan pajak proporsionalnya (hanya pajak otonomnya saja) dan (d) Bagaimana pengaruh efek multiplier pada kasus ini.

$C = C_1 + bY_d \quad T = T_1 + tY \quad Y_d = Y - T$

$I = I_0 = 40, \; C_0 = 100, \; b = 0{,}8 \; t = 0{,}25$ đan $T_0 = 50$

a. Pendapatan nasional yang diturunkan dari model:

$$Y = C + I$$
$$= C_0 + bY_1 + I_0$$
$$= C_0 + b(Y - T) + I_0$$
$$= C_0 + b(Y - T_0 - tY) + I_0$$

$Y - by + btY = C_0 - bT_0 + I_0$

$$Y = \frac{C_0 - bT_0 + I_0}{(1 - b - bt)}$$

b. Hanya memasukkan pajak otonom $T = T_0$ saja. Jadi $t = 0$, sehingga:

$$Y = \frac{C_0 - bT_0 + I_0}{(1 - b - bt)} = \frac{100 - 0{,}8(50) + 40}{(1 - 0{,}8)}$$
$$= \frac{100}{0{,}2} = 500$$

c. Pajak sebagai proporsional pendapatan yaitu $T = T_0 + tY$.

$$Y = \frac{C_0 - bT_0 + I_0}{(1 - b - bt)} = \frac{100 - 0{,}8(50) + 40}{(1 - 0{,}8)}$$
$$= \frac{100 - 40 + 40}{1 - 0{,}8 + 0{,}2} = 500$$
$$= \frac{100}{0{,}4} = 250$$

d. Pajak akan menurunkanangka pengganda multiplier dari I/(I-b) = 5 menjadi I/(I-b-bt) = 2,5. Akibatnya pendapatan nasional akan turun secara proporsional yaitu sebesar [Y(bx1)] = [500(0,8x0,25)] = 250.

Contoh 36, Jika sektor perdagangan internasional dimasukkan pada model dan terdapat kecenderungan marginal untuk mengimpor (*Marginal Propensity to Import* atau m). Tentukan: (a) Model yang diturunkan, (b) Tingkat keseimbangan dan (c) Pengaruhnya terhadap multiplier.

$Y = C + I + G + (X - M) \quad C = C_0 + bY_d \quad M = M_0 + mY$

$I = I_0 = 40, G = G_0 = 80, \; x = x_0 \; 70, C_0 = 120b = 0{,}8 \; M_0 = 40, m = 0{,}3$

a. Pendapatan nasional yang diturunkan dari model:

$Y = C + I + G + (X - M)$

$= C_0 + bY_d + I_o + G_o + X_o – (M_o + mY)$

Karena tidak ada pajak dan pembayaran alihan maka $Y_d = Y$,

sehingga:

$Y = C + I + G + (X – M)$

$= C_o + bY_d + I_o + G_o + X_o – (M_o + mY)$

Karena tidak ada pajak dan pembayaran alihan maka $Y_d = Y$.

Sehingga :

$Y – bY + mY = C_o + I_o + G_o + X_o – M_o$

diperoleh:

$$Y = \frac{C_o + I_o + G_o + X_o - M_o}{(1 - b + m)}$$

b. Dengan menggunakan model yang diturunkan di atas diperoleh :

$$Y = \frac{C_o + I_o + G_o + X_o - M_o}{(1 - b + m)}$$

$$= \frac{120 + 40 + 80 + 70 - 40}{(1 - 0{,}8 + 0{,}3)} = \frac{270}{0{,}5} = 540$$

c. Pemasukan kecenderungan marginal untuk mengimpor (m) ke dalam model, akan mengurangi besarnya multiplier. Sehingga pendapatan nasionalnya juga semakin kecil yaitu:

$$\frac{1}{1 - b} = \frac{1}{1 - 0{,}8} = 5, \text{maka } Y = \frac{C_o + I_o + G_o + X_o - M_o}{(1 - b + m)}$$

$$= \frac{270}{0{,}5} = 540$$

Contoh 37, Konsumsi sebuah negara diberikan oleh persamaan $C = C_o + bY_d$ dan investasi nasional ditunjukkan oleh $I = I_o – ri$. Pengeluaran pemerintah 500 serta pembayaran alihan sebesar 150. Jika pajak yang diterima adalah $T = T_o + tY$, tingkat ekspor dan impor masing-masing 1.300 dan 1.600. Hitunglah pendapatan nasional negara tersebut, pajak yang diterima, konsumsi dan pendapatan disposabel dan besarnya tabungan nasional jika tingkat harga yang berlaku 13%.

$Y = C + I + G + (X – M)$ $C = C_O + bY_d$ $I = I_o – ri$ $T = T_o + Ty$

$I_o = 400$, $C_o = 15.000$, $T_o = 200$, $b = 0{,}6$ $r = 3000$ dan $t = 0{,}1$

a. Pendapatan nasional yang diturunkan dari model :

$Y = C + I + G + (X – M)$

$= C_o + bY_d + (I_o - ri) + G_o + X_o – M_o$

Pada $Y_d = Y – T + R$, maka:

$$Y = C_0 + b(Y – T + R) + (I_o – ri) + G_o + X_o – M_o$$
$$= C_o + b(Y – T_o – tY + R) + (I_o – ri) + G_o + X_o – M_o$$

$Y – bY + btY = C_o + bT_o + bR + I_o – ri + G_o + X_o + M_o$

$$Y = \frac{C_o + bT_o + bR + I_o - ri + G_o + X_o + M_o}{(1 - b + b_t)}$$

Dengan menggunakan model yang diturunkan di atas dan memasukkan data-data yang tersedia diperoleh:

$$Y = \frac{15000 - 0,6(200) + 0,6(150) + 400 + 3000(0,13) + 500 + 1.300 - 1600}{[1 - 0,6 + 0,6(0,1)]}$$

$$= \frac{15000 - 1200 + 90 + 400 - 390 + 500 + 1.300 - 1600}{[1 - 0,6 + 0,06]}$$

$$= \frac{15.180}{0,46}$$

Jadi, besarnya pendapatan nasional adalah Y =33.000

b. Pada Y = 33.000, maka:

Pajak T $= T_o + tY = 200 + 0,1(33.000)$

$= 200 + 3.300$

$= 3.500$

Konsumsi $C = C_o\ bY_d = C_o + b(Y – T + R)$

$= 15.000 + 0,6(33.000 – 3.500 + 150)$

$= 15.000 + 17.790$

$= 32.790$

Pendapatan disposabel $Y_d = Y – T + R = 33.000 – 3.500 +150$

$= 29.650$

Tabungan $S = Y_d – C = 29.650 – 32.790$

$= -3.140$

Contoh 38. Hitunglah pendapatan nasional, pajak yang diterima pemerintah, besarnya konsumsi dan tabungan nasional jika diketahui $C = 4.000 + 0,5Y_d$, $I = I_o = 750$, $G = G_o = 3.000$, $R = 250$ dan $T = 1.500 + 0,02Y$.

a. Pendapatan Nasional :

$$Y = C + I + G$$
$$= 4.000 + 0{,}5Y_d + 750 + 3.000$$
$$= 7.750 + 0{,}5Y(Y - T + R)$$
$$= 7.750 + 0{,}5(Y - 1.500 - 0{,}002Y + 250)$$
$$Y - 0{,}5Y + 0{,}01Y = 7.750 - 750 + 125$$
$$0{,}51 = 7.125 \rightarrow Y = 13.970$$

b. Pada Y = 13.970 maka:

Pajak T $= T_o + tY = 1.500 + 0{,}02(13.970)$

$= 1.500 + 280$

$= 1.780$

Konsumsi C $= C_o + bY_d = C_o + b(Y - T + R)$

$= 4.000 + 0{,}5(13.970 - 1.780 + 250)$

$= 4.000 + 6.220$

$= 10.220$

Tabungan S $= Y_d - C = (Y - T + R) - C$

$= (13.970 - 1.780 + 250) - 10.220$

$= 12.440 - 10.220$

$= 2.220$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Suatu permintaan terhadap barang dicerminkan dari gejala berikut: yaitu jika barang dijual seharga Rp 100,- per unit laku sebanyak 1000 unit, sedangkan jika harga diturunkan menjadi Rp 90.- barang tersebut laku sebanyak 1.100 unit
   a. Bagaimanakah bentuk fungsi permintaan barang
   b. Berapa harga maksimum agar masih ada ban membelinya dan
   c. Gambarkan fungsi permintaan tersebut.
2. Fungsi penawaran barang dicerminkan dari gejala: Bila barang tersebut dijual seharga Rp 1.000,- per unit akan laku sebanyak 1.500 unit. Adanya kenaikan harga sebesar 100 rupiah jumlah yang terjual bertambah sebanyak 300 unit.
   a. Bagaimanakah bentuk fungsi penawaran banten.
   b. Berapa jumlah barang yang ditawarkan jika Rp 2.000.- per unit.
3. Fungsi permintaan pasar atas suatu barang dicerminkan oleh persamaan P = -Q + 30 dan penawarannya P = Q + 1. Berapakah harga (P) dan jumlah (Q) keseimbangan yang terjadi di pasaran tunjukkan tingkat keseimbangan tersebut dalam gambar.
4. Seperti pada contoh-3, jika fungsi permintaan ditunjukkan oleh persamaan $P = -Q^2 + 100$ dan fungsi penawarannya $P = Q^2 + 100$ dan fungsi penawarannya P = Q + 2.
5. Fungsi permintaan barang ditunjukkan oleh persamaan P = -Q dan penawarannya P = Q. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar t = 2 per unit. Ditanyakan:
   a. Berapakah harga keseimbangan dan jumlah keseimbang sebelum pajak,
   b. Berapa harga keseimbangan dan jumlah keseimbang sesudah pajak,
   c. Besar pajak yang ditanggung oleh konsumen dan produsen,
   d. Gambarkan grafik fungsi tersebut.
6. Kerjakan seperti soal-5: Fungsi permintaan Q = -P + 25 dan fungsi penawarannya adalah Q = P – 1. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar t = 1 per unit.
7. Fungsi permintaan barang ditunjukkan oleh persamaan $P = -Q^2 + 35$ dan fungsi penawaran P = Q + 5. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak penjualan sebesar r = 10%. Ditanyakan :
   a. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan sebelum pajak.
   b. Berapa harga dan jumlah keseimbangan sesudah pajak.

c. Besar pajak yang ditanggung oleh konsumen dan produsen.
d. Gambarkan grafik fungsi tersebut.

8. Kerjakan seperti soal-7. Diketahui fungsi permintaan Q = -P + 21 dan penawaran Q = P + 1. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak penjualan sebesar r = 10%.
9. Fungsi pemaintaan barang ditunjukkan oleh persamaan P = -Q + 24 dan fungsi penawaran P = 0,5Q + 9. Terhadap barang tersebut dikenakan subsidi sebesar s = 2 per unit terhadap barang yang dijual.
   a. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan sebelum subsidi.
   b. Berapa harga dan jumlah keseimbangan sesudah subsidi.
   c. Besar subsidi yang diberikan pemerintah.
10. Fungsi produksi ditunjukkan oleh persamaan $P = 600Q^2 – 2Q^3$ di mana (P output produksi dan Q input produksi):
    a. Carilah fungsi produksi rata-ratanya dan hitunglah produksi total dan produksi rata-rata pada input Q = 100 unit.
    b. Berapa produksi marginalnya jika digunakan tambahan input sebanyak 1 unit?
11. Fungsi permintaan suatu barang yang dihadapi perusahaan monopolis dicerminkan oleh persamaan P = 50 – 0,50. Ditanyakan:
    a. Bagaimana bentuk fungsi pendapatan totalnya.
    b. Pada tingkat produksi berapa unit, pendapatan total akan maksimum.
    c. Hitunglah pendapatan rata-rata pada tingkat output tersebut.
    d. Gambarkan fungsi pendapatan total dan pendapatan rata-rata.
12. Biaya total yang dikeluarkan oleh produsen dicerminkan oleh persamaan $TC = 0,5Q^2 – 100Q$. Pada tingkat berapa unit biaya total minimum. Hitunglah besarnya biaya total dan biaya rata-rata pada tingkat produksi tersebut dan gambarkan.
13. Fungsi biaya total yang dikeluarkan oleh perusahaan ditunjukkan oleh persamaan $TC = Q^2 – 20Q$ dan pendapatan $TR = -Q^2 + 100Q$. Hitunglah keuntungan dan kerugian perusahaan jika ia memproduksi pada:
    a. Tingkat produksi yang menghasilkan biaya total maksimum.
    b. Tingkat produksi yang menghasilkan biaya total minimum.
    c. Tingkat produksi berapa unit keuntungan maksimum akan dicapai.
    d. Bagaimana kesimpulan.

14. Seseorang mempunyai uang sebesar Rp 48.000,- yang akan dipakai membeli dua macam produk A dan B yang masing-masing berharga Rp 12.000,- dan Rp 6.000 per unit.
    a. Gambarkan garis anggaran yang menunjukkan semua kombinasi yang berbeda dan dua barang yang dapat dibeli dengan anggaran Rp 48.000,-
    b. Jika anggaran tersebut dinaikkan sebanyak 50%, bagaimana yang terjadi pada garis anggaran.
    c. Jika harga A diturunkan menjadi Rp 8.000.- dan
    d. Harga B dinaikkan menjadi Rp 12.000
15. Kepuasan seorang konsumen mengkonsumsi suatu barang ditunjukkan oleh fungsi utilitas U = -0,5Q° + 100Q. Ditanyakan :
    a. Berapa unit barang harus dikonsumsi bila konsumen ingin memaksimumkan tingkat kepuasan atas barang itu. Hitunglah nilai utilitas maksimum tersebut.
    b. Apa yang terjadi bila konsumen tadi ingin mengkonsumsi satu unit lagi barang tersebut.
16. *Autonomour consumption* masyarakat diketahui sebesar 2 milyar rupiah sedangkan MPC-nya = 0,5. Bagaimana bentuk fungsi konsumsi dan fungsi tabungannya. Hitunglah besarnya konsumsi dan tabungan jika pendapatan nasionalnya sebesar 20 milyar rupiah.
17. Fungsi konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan C = 150 + 0,5Yd. Jika pemerintah menerima pembayaran pajak sebesar 5 dari masyarakat dan memberikan pembayaran alihan kembali sebesar 20, hitunglah biaya konsumsi pada saat pendapatan nasional sebesar 500.
18. Fungsi konsumsi ditunjukkan oleh persamaan C = 900 + 0,5Yd. Jika pemerintah menerima pajak sebesar T = 100 + 0,1Y dari masyarakat dan memberikan pembayaran alihan sebesar 50. Hitunglah besarnya pendapatan disposabel jika pendapatan nasionalnya 10.000 dan hitunglah besarnya konsumsi, tabungan dan pajak total.
19. Fungsi permintaan akan investasi Negara Cakrabirawa dicerminkan oleh persamaan 1 = 5.000 -- 2.500i. Berapa besarnya investasi pada saat tingkat suku bunga sebesar 40% per tahun dan 50% per tahun.
20. Diberikan suatu perekonomian dua sektor Y C + I.

a. Carilah bentuk yang diturunkan dari model pendapatan nasional dari perekonomian dua sektor tersebut dimana fungsi konsumsi dicerminkan oleh persamaan C = Co + bYd dan investasi nasional I = Io serta adanya penerimaan pajak sebesar 100.
b. Hitunglah tingkat keseimbangan pendapatan nasional jika diketahui: Co = 500, b = 0,6; a = 0,2; Io = 200 dan T = To.
c. Berapakah nilai multipliernya.

21. Perekonomian tiga sektor dengan konsumsi nasional dicerminkan oleh persamaan C = 500 + 0,25 Y_d dan jumlah investasi sebesar Rp 100 juta serta pengeluaran pemerintah Rp 250 juta rupiah:
a. Cari pendapatan nasional.
b. Hitunglah pendapatan nasional yang baru jika terdapat tambahan investasi sebesar 50 juta rupiah.

22. Konsumsi sebuah Negara Federasi Cendana diberikan oleh $C = C_o + bY_d$ dan investasi ditunjukkan oleh $I = I_o$. Pengeluaran pemerintah 1.000 serta pembayaran alihan sebesar 300. Jika pajak yang diterima adalah $T = T_o + tY$, tingkat ekspor dan impor masing-masing 1.500 dan 2.000.
a. Berapakah pendapatan nasional Negara Federasi Cendana tersebut
b. Hitunglah pajak yang diterima konsumsi dan pendapatan disposabel dan besarnya tabungan nasional jika tingkat bunga yang berlaku sebesar 20%.

23. Tabungan masyarakat suatu negara dicerminkan oleh persamaan $S = -500 + 0{,}5Y_d$ dan investasinya sebesar 400. Penerimaan pemerintah berupa pajak yaitu T = 200 + 0,2Y, pengeluaran pemerintah sebesar 200 dan pembayaran alihan sebesar 200. Jika tingkat ekspor sebesar 700 dan impor ditunjukkan oleh penerimaan M = 100 + 0,1Y. Hitunglah:
a. Pendapatan nasional.
b. Pendapatan disposabel.
c. Besanya konsumsi dan tabungan masyarakat.
d. Besarnya pajak dan impor.

24. Hitunglah pendapatan nasional, pajak yang diterima pemerintah besarnya konsumsi dan tabungan nasional sika diketahui $2.000 + 0{,}25Y_d$, $I = I_o = 325$, $G = G_o = 1.500$, R =125 dan T = 750 + 0,01Y.

BAB VII

LIMIT DAN KONTINUITAS

7.1 LIMIT TERHINGGA

Satu definisi yang seluruhnya diungkapkan dengan sifat-sifat bilangan riil, pertama kali dirumuskan oleh ahli matematika Perancis Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Definisi yang dipakai sampai saat ini dapat dijelaskan dengan mudah dengan menggunakan konsep limit.

Pada awal perkembangan ilmu kalkulus, hampir semua fungsi yang dihadapi merupakan fungsi kontinu dan tidak ada keberanian dari para ilmuwan untuk mengungkapkan arti yang pas dari kontinuitas. Baru pada awal abad XIX, setelah dijumpai persoalan-persoalan fisis untuk fungsi yang diskontinu dan kemudian dikembangkannya teori tentang panas oleh J.B.J. Fourier (1758-1830), para matematikawan mulai melirik beberapa teorema fungsi dan kontinuitas.

Untuk dapat menentukan limit suatu fungsi di suatu titik, terlebih dulu perlu dilakukan suatu taksiran kasar. Kemudian dari taksiran-taksiran kasar tersebut dibuktikan dengan menggunakan definisi limit. Kadang-kadang juga untuk menentukan limit suatu fungsi di suatu titik dengan cara membandingkan dengan dua fungsi lain yang limitnya di titik yang sama diketahui.

Pandanglah suatu fungsi f(x) apabila variabel bebas x terus-menerus bergerak sehingga mendekati nilai tertentu a:

$$\lim_{x \to a} \mathrm{f(x)} = \mathrm{L} \qquad 7\text{-}1$$

Pernyataan diatas dapat dibaca, "*limit fungsi f(x) untuk nilai x yang bergerak mendekati a adalah L*". Artinya, jika variabel bebas x bergerak secara kontinu sehingga mendekati nilai tertentu a, maka fungsi f(x) pun akan bergerak secara kontinu sehingga akan mendekati nilai tertentu L.

Pada definisi $\lim_{x \to a} \mathrm{f(x)}$, tidak ada pertanyaan apa-apa mengenai tingkah laku fungsi f(x) di titik a itu sendiri. Pada definisi itu kita hanya mengizinkan harga-harga f(x) di sekitar a dan sama sekali tidak mempedulikan fungsi dititik a. Selanjutnya, meskipun f(x) terdefinisi di titik a, tidak perlu f(a) = $\lim_{x \to a} \mathrm{f(x)}$. Dalam hal f(a) = $\lim_{x \to a} \mathrm{f(x)}$, maka dikatakan bahwa fungsi f(x) kontinu di titik a.

Pandanglah suatu fungsi f(x) = 5x + 5 di sekitar x = 2 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 5x + 5$$

f(x) didekati dari kiri atau limit kiri ($x \to 2^-$)

f(1.9)	= 14,5
f(1.99)	= 14,95
f(1.999)	= 14,995
f(1.9999)	= 14,9995
f(1.99999)	= 14,99995
f(1.999999)	= 14,999995
f(1.9999999)	= 14,9999995
f(1.99999999)	= 14,99999995
f(1.999999999)	= 14,999999995

f(x) didekati dari kanan atau limit kanan ($x \to 2+$)

f(2,000000001)	= 15,000000005
f(2,00000001)	= 15,00000005
f(2,0000001)	= 15,0000005
f(2,000001)	= 15,000005
f(2,00001)	= 15,00005
f(2,0001)	= 15,0005
f(2,001)	= 15,005
f(2,01)	= 15,05
f(2,1)	= 15,5

Jadi secara kasar harga-harga f(x) dapat dibuat sedekat mungkin pada angka 15 dengan memilih x yang cukup dekat dengan 2, tetapi $x \neq 2$. Situasi diatas dapat dituliskan: $\lim_{x \to 2} 5x + 5 = 15$

Seringkali kita perlu menentukan hasil $\lim_{x \to 2} f(x)$ dimana antara nilai f(x) yang didekati dari kiri maupun dari kanan mempunyai hasil yang berbeda. Untuk pengertian ini, maka dibutuhkan suatu konsep limit yang didekati dari arah kiri dan arah kanan di titik a. Dengan asumsi yang sama juga diperlukan konsep kontinuitas kiri dan kontinuitas kanan di titik a.

Pandanglah limit suatu fungsi yang didekati dari kiri:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \qquad 7\text{-}2$$

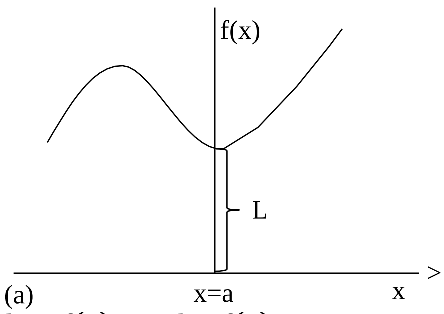
Sedang untuk limit suatu fungsi yang didekati dari kanan adalah :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \qquad 7\text{-}3$$

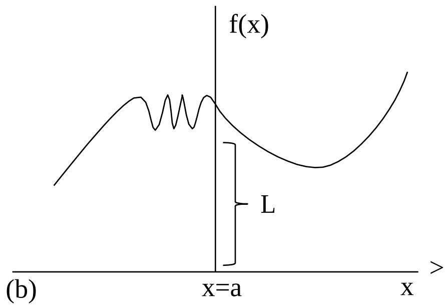
Di bawah ini disajikan beberapa ilustrasi suatu limit yang didekati baik dari arah kiri ($x\to a^+$) maupun yang didekati dari arah kanan ($x\to a^-$).

Melalui kajian visual dapat diperiksa bahwa limit fungsi akan memenuhi sifat-sifat berikut:

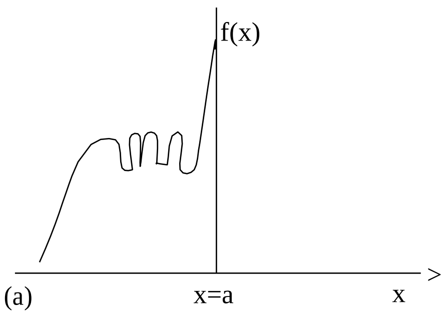
1. $\lim_{x\to a} kf(x) = k \lim_{x\to a^+} f(x)$ dengan k suatu konstanta
2. $\lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
3. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ asalkan $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
4. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ asalkan $\lim_{x\to a} f(x) > 0$, n bilangan genap



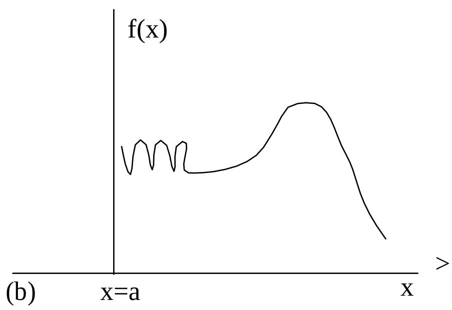
$\lim_{x\to a} f(x) = L, \lim_{x\to a} f(x) = L$
dan $\lim_{x\to a} f(x) = L$



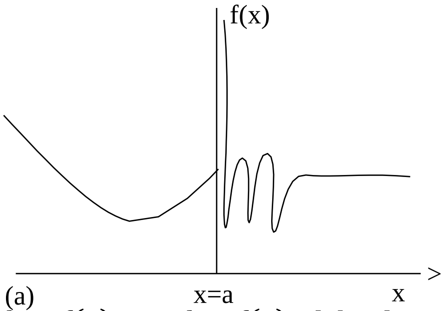
$\lim_{x\to a} f(x)$ tidak ada, $\lim_{x\to a} f(x) = L$
dan $\lim_{x\to a} f(x)$ tidak ada



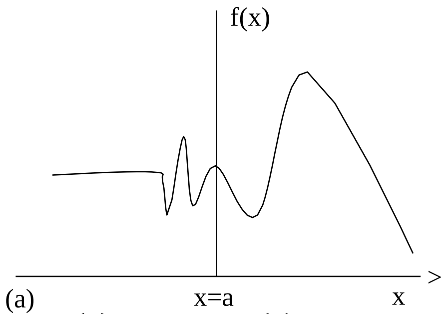
$\lim_{x\to a} f(x) =$ tidak ada



$\lim_{x\to a} f(x)$ tidak ada



$\lim\limits_{x\to a} f(x) = I_x \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ tidak ada
dan $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ tidak ada



$\lim\limits_{x\to a} f(x) = I_x \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ tidak ada
dan $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ tidak ada

Gambar 7.1

Contoh 1. Untuk persoalan limit berikut ini.

1. Hitunglah $\lim\limits_{x\to 5} (2x^2 - 3x + 8)$

   Dengan menggunakan teorema (1) dan (2) penyelesaian selengkapnya:

   $\lim\limits_{x\to 5} (2x^2 - 3x + 8) = \lim\limits_{x\to 5} 2x^2 - \lim\limits_{x\to 5} 3x + \lim\limits_{x\to 5} 8$

   $= 50 - 15 + 8 \neq 43$

2. Tentukan $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{20x-4}{8-x}$

   Dengan menggunakan terema (3) diperoleh;

   $\lim\limits_{x\to 2} 20x - 4 = 36$ dan $\lim\limits_{x\to 2} 8 - x = 6$ sehingga,

   $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{20x-4}{8-x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} 20x-4}{\lim\limits_{x\to 2} 8-x} = \dfrac{36}{6} = 6$

3. Tentukan $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x-4}{x^2-5x+6}$

   Dapat diuraikan $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x-4}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2+2x+2)(x-2)}{(x-3)(x-2)}$

   $= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2+2x+2)}{(x-3)} = \dfrac{4+4+2}{2-3}$

   $= -10$

4. Tentukan $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{(2x-1)}}{(x-1)}$

Bentuk di atas dapat diubah menjadi:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{(2x-1)}}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{(2x-1)}}{(x-1)} \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{(2x-1)}}{\sqrt{x} + (x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x - (2x-1)}{(x-1)[\sqrt{x} + \sqrt{(2x-1)}]}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)[\sqrt{x} + \sqrt{(2x-1)}]}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-1}{[\sqrt{x} + \sqrt{(2x-1)}]}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1} + \sqrt{(2x-1)}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = -\frac{1}{2}$$

Contoh 2, Hitunglah fungsi-fungsi limit berikut:

1. Tentukan $\lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{(4x-3x)}}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{(4x-3x)}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{(4-3x)}}{x} \cdot \frac{2 + \sqrt{(4-3x)}}{2 + \sqrt{(4-3x)}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4 + \sqrt{(4-3x)}}{x[2 + \sqrt{(4-3x)}]}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3x}{2 + \sqrt{(4-3x)}}$$

$$= \frac{3}{2 + \sqrt{4}}$$

$$= \frac{3}{4}$$

2. Tentukan $\frac{f(x+b) - f(x)}{h}$ jika diketahui $f(x) = 3x^2 + 2x + 6$

Dengan menghitung $f(x+b) = 3(x+h)^2 + 2(x+h) + 6$, maka :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x+b) - f(x)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{[3(x+b)^2 + 2(x+h) + 6] - [3x^2 + 2x + 6]}{h}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(6xh+3h^2+2h)}{h}$$

$$= \lim_{x \to 0} 6 \text{ x } h + 3h^2 + 2$$

$$= 6x + 2$$

7.2 LIMIT SEMU

Apabila suatu fungsi f(x) terdefinisikan untuk semua bilangan nyata, maka dapat ditanyakan bagaimanakah kelakuan nilai fungsi f(x) antuk nilai x yang menjadi sangat besar atau kecil atau sebaliknya kelakuan nilai fungsi f(x) di sekitar suatu titik di mana f(x) menjadi sangat besar dan dapat juga sebagai gabungan dari keduanya. Dengan kalimat lain, nilai fungsi f(x) menjadi besar tanpa batas pada saat x menuju a dari arah kiri maupun ketika x menuju a dari arah kanan yaitu:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \propto \text{ dan } \lim_{x \to a^+} f(x) = \propto$$

Sehingga, jika fungsi f(x) tersebut didekati dari dua arah menjadi:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \propto \qquad 7\text{-}4$$

Untuk fungsi yang negatif sangat kecil sekali (baik yang didekati dari arah kiri maupun kanan) dapat dituliskan: $\lim_{x \to a} f(x) = -\propto$

Seperti halya sifat-sifat limit terhingga, maka akan berlaku juga pada limit tak terhingga. Dengan demikian sifat-sifat yang khas dari limit tak terhingga yaitu $\lim_{x \to a} f(x)$ = L dan $\lim_{x \to a} g(x)$ = R, maka :

1. $\lim_{x \to a} kf(x) = kL$
2. $\lim_{x \to a} f(x) \pm g(x) = L \pm R$
3. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{R}$ asalkan R ≠ 0
4. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)}\ \sqrt[n]{L}$ asalkan L > 0, n bilangan genap

Contoh 3, Hintunglah masing-masing limit berikut ini:

1. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{8x+3}{4x-2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x+3}{4x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x(8x+3)}{1/x(4x-2)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{8+3/x}{4-2/x} = \frac{8+0}{4-0} = 2$$

2. Didefinisikan e = $\lim_{x\to\infty} (1 + 1/x)^x$ hitunglah sampai tujuh digit.

   Dengan menggunakan rumus Newton dapat diuraikan:

$$(1+1)^x = 1 + \frac{x}{1!}(1/x) + \frac{x(x-1)}{2!}(1/x)^2 + \frac{x(x-1)(x-1)}{3!}(1/x)^3 + \cdots$$

$$= \cdots + \frac{x(x-1)(1-2)\ldots.2.1}{x!}(1/x)^x$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-1/x) + \frac{1}{3!}(1-1/x)(1-2/x) +$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \text{(tak terhingga)}$$

$$= 2{,}7182818$$

   Jadi, e = $\lim_{x\to\infty} (1 + 1/x)^2$ = 2,7182818

3. Carilah $\lim_{x\to 0}$ = 1/x

   Limit di atas akan didekati dari arah kiri dan arah kanan,

   $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1/x = 1/0 = -\infty$ dan $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1/x = 10 = \infty$

   $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ tidak ada

4. Hitunglah $\lim_{x\to\infty} \sqrt{(x^2+2)} - \sqrt{(x^2-x)}$

5. $$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\cancel{(x^2+x)}} - \sqrt{\cancel{(x^2-x)}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\cancel{(x^2+x)}} - \sqrt{\cancel{(x^2-x)}}. \frac{\sqrt{(x^2+x)}+\sqrt{(x^2-x)}}{\sqrt{(x^2+x)}+\sqrt{(x^2-x)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+x)-(x^2-x)}{\sqrt{(x^2+x)}+\sqrt{(x^2-x)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{(x^2+x)}+\sqrt{(x^2-x)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x/x}{\sqrt{(x^2+x)}+\sqrt{(x^2-x)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{(x^2/x^2+x/x^2)}+\sqrt{(x^2/x^2-x/x^2)}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1+0)} + \sqrt{(1-0)}} = 1$$

Contoh 4. Hitunglah masing-masing limit berikut ini:

1. Hitunglah $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-4x+3}{3x^2-7x-6}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-4x+3}{3x^2-7x-6} = \lim_{x\to\infty} \frac{5-4/x+3x^2}{3-7/x-6x^2}$$

$$= \frac{5-0+0}{3-0+0} = 5/3$$

2. Hitunglah $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{(x^2+x)} - x$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{(x^2+2x)} - x = \lim_{x\to\infty} \sqrt{(x^2+2x)} - x. \frac{\sqrt{(x^2+x)}+x}{\sqrt{(x^2+x)}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{(1+2x)}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{(1+2x)}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{(1+2/x)}+1} = \frac{2}{\sqrt{(1+1)}} = 1$$

7.3 KONTINUITAS FUNGSI

Sampai sejauh ini telah dipaparkan bagaimana konsep limit dapat menjelaskan perilaku nilai limit di sekitar titik tertentu. Dari beberapa ilustrasi seperti pada gambar 8-1 di atas dapat didefinisikan bahwa limit suatu fungsi f(x) kontinu di sekitar x = a, jika dan hanya jika:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \to$ ada
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Jika f(x) tidak kontinu di x = a, maka f(x) disebut diskontinu di x = a. Dapat pula terjadi jika syarat (1) tidak dipenuhi. Maka diskontinuitas dari fungsi tidak dapat dihapuskan (diskontinu loncat). Adapun jika suatu $\lim\limits_{x\to a} f(x)$-ada, akan tetapi $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ yaitu di mana syarat (2) tidak dipenuhi, maka fungsi disebut diskontinu yang dapat dihapuskan. Karena dengan mendefinisikan $\lim\limits_{x\to a} f(a) = f(a)$, fungsi f(x) tersebut akan kontina di x = a. Dengan demikian, fungsi f(x) tersebut akan kontinu di kiri maupun f(x) kontinu di kanan pada x = a, jika:

1. $\lim\limits_{x \to a} (x) \to$ ada
2. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \to f(a) \lim\limits_{x \to a^+}$
3. $f(x) \to f(a)$

Contoh 5. Selidikilah kekontinuitasan limit fungsi berikut ini:

1. $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$

   Limit tidak kontinu pada x = 3 karena f(3) tidak terdefinisikan. Akan tetapi kajian tentang limit fungsi memperlihatkan bahwa $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$.

   Jadi, ketidakkontinuitasan limit fungsi di x = 3 dapat dihapuskan dengan cara mendefinisikan fungsi f(3) = 6. Dengan demikian limit fungsi menjadi,

   $$f(x) = \frac{(x^2 - 9)/(x - 3), \text{untuk } x \neq 3}{6, \text{untuk } \quad x = 3}$$

2. Selidikilah kekontinuitasan limit fungsi di x = 0 berikut:

   $$f(x) = \frac{-1 \quad \text{untuk } x < 0}{x \quad \text{untuk } x > 0}$$

   Limit fungsi di atas dapat diselidiki dari dua arah yaitu:

   $$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 \end{matrix}\right] \begin{matrix} 0 \pm -1 \text{ sehingga } \lim\limits_{n \to 0} f(x) \text{tidak ada} \\ \text{diskontinu di } x = 0 \text{ tidak dapat dihapus (Gambar 7.2a)} \end{matrix}$$

3. Selidikilah kontinuitasnya di x = 1 dari fungsi berikut:

   $$f(x) = \left[\begin{matrix} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{untuk } x \neq 1 \\ 3 & \text{untuk } x = 1 \end{matrix}\right.$$

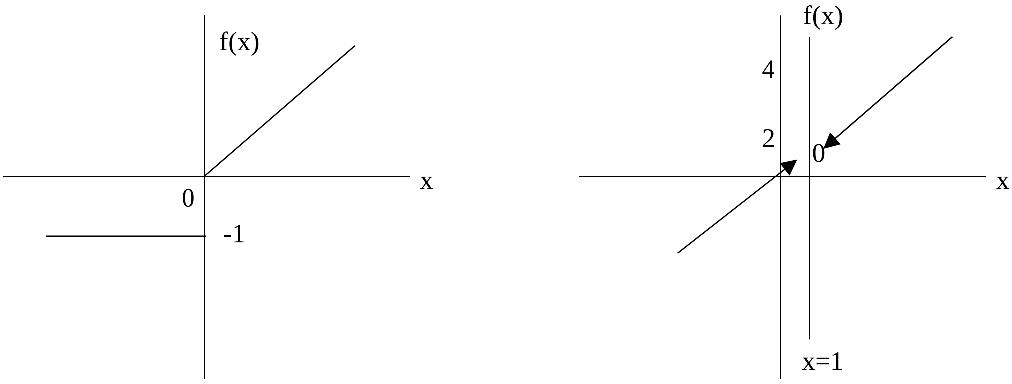
   Dapat diselidiki: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim \dfrac{(x-1)(x-1)}{(x-1)}$

   $= \lim x + 1$

   Pada $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 1) = 2$

   Pada $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x + 1) = 2$

Pada f(1) = 3 maka f(x) diskontinu di x = 1. Akan tetapi diskontinuitas dapat dihapuskan dengan mendefinisikan f(1) = 2 (Gambar 7-2b).



(a) (a)

Gambar 7.2. Kekontinuitasan Suatu Fungsi.

7.4 BENTUK-BENTUK TAK TENTU

Dalam perhitungan limit seringkali kita menghadapi kasus-kasus limit dalam bentuk-bentuk taktentu berikut ini:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0,$ dicari : $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0,$ dicari : $\lim\limits_{x\to a} f(x).\,g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty,$ dicari : $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty,$ dicari : $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)]$
5. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty,$ dicari : $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)$
6. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0,$ dicari : $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$
7. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1, \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty,$ dicari : $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$

7.5 TEOREMA L'HOSPITAL

Bentuk-bentuk tak tentu baik (o/o maupun $^{oo}/^{oo}$) dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan teorema l'Hospital. Jika suatu fungsi h(x) dan g(x) dua fungsi yang masing-masing mempunyai turunan (fungsi turunan akan dibicarakan pada Bab-IX) maka:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Contoh 6. Hitunglah limit suatu fungsi berikut ini:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \rightarrow$ bentuk tak tentu oo/oo

   Misal : h(x) = 8x – 3 → h'(x) = 8

   g(x) = 4x – 2 → g'(x) = 4

   Dengan mensubstitusikan harga-harga di atas pada rumus 7-5 maka:

   $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{h'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{4} = 2$

   Jadi, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x+3}{4x-2} = 2$

2. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{6x-12}$ → bentuk tak tentu $\frac{o}{o}$

   Misal : h(x) = x2 – 5x + 6, → h'(x) = 2x – 5

   g(x) = 6x – 12, → g'(x) = 6

   $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{h'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-5}{6}$

   $= \dfrac{2(2)-5}{6} = -1/6$

   Jadi, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+5x-6}{6x-12} = -1/6$

3. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x^2-3x+18}$ → bentuk tak tentu $\frac{o}{o}$

   Misal : h(x) = x2 + x – 12, → h'(x) = 2x + 1

   g(x) = x2 + x – 12, → g'(x) = 2x + 3

   $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{h'(x)}{g'(x)}$ → $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \dfrac{2x+1}{2x+3}$

   $= \dfrac{2(3)+1}{2(3)+3} = 7/9$

   Jadi, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x^2+3x-18} = -7/9$

7.6 LIMIT FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMA

Pada pasal berikut akan dibahas perhitungan-perhitungan limit yang menyangkut fungsi eksponensial dan fungsi logaritma. Menurut rumus diperoleh:

$$e = \lim_{x\to\infty} (1 + 1/x)x \qquad 7\text{-}6$$

Misalkan n = 1/x, maka untuk x $\to\infty$ diperoleh n = 0. Dengan demikian rumus 7-6 dapat pula ditulis dalam bentuk:

$$e = \lim_{x\to 0} (1 + n)1/n \qquad 7\text{-}7$$

Karena fungsi eksponensial dan fungsi logaritma kontinu, maka dengan mengambil logaritma natural masing-masing ruas dari rumus 7-7 diperoleh:

$$\text{Ine} = \underset{x\to 0}{\text{In}} \lim\ (1 + n)l/n$$

$$= \lim_{x\to 0} \text{In } (I + n)1/n$$

$$= \lim_{x\to 0} \text{In } \frac{(I + n)}{n} \qquad 7\text{-}8$$

Jika suatu limit fungsi $\lim\limits_{x\to 0}$ $\{(1 + f(x)\}^{g(x})$ maka dapat dicari penyelesaian dengan mudah yaitu dengan mengambil logaritma sebagai berikut:

$$\text{In } [\lim_{n\to a}(1 + f(x))^{g(x)}] = \lim_{n\to a}[\text{In}[1 + f(x)^{g(x)}]]$$

$$= \lim_{n\to a}[\text{In}[1 + f(x)]]$$

$$= \lim_{x\to a} g(x)\ [f(x)\ \frac{\text{In}[1 + f(x)]}{f(x)}] \qquad 7-9$$

Karena $\lim\limits_{x\to a} \frac{\text{In}[1+f(x)]}{f(x)}$ = 1, maka rumus 7-9 menjadi:

$$\text{In } [\lim_{x\to a} (1 + f(x))^{g(x)}] = g(x)\ .\ f(x) \qquad 7-10$$

Dengan menarik logaritma natural elog b = c ke dalam bentuk eksponensial ee = b, rumus 7-10 dapat ditulis lebih sederhana yaitu.

$$\lim_{x\to a} (1 + f(x))^{g(x)} = e^{f(x).g(x)} \qquad 7-11$$

Contoh 7. Diketahui, L = $\lim\limits_{x\to\infty}$ $(1+3/x)^{4x+2}$ hitunglah L!

$$L = \lim_{x\to\infty} (1+3/x)^{4x+2}$$

$$\text{In } L = \text{In} \lim_{x\to\infty} (1+3/x)^{4x+2} \lim_{x\to\infty} (4x + 2) \text{ In } (1 + 3/x)$$

$= \lim\limits_{x\to\infty} (4x + 2).(3/x) \left[\frac{\text{In}[1+3/x]}{3/x}\right] \lim\limits_{x\to\infty} (4x + 2)(3/x)$

$= \text{In} \lim\limits_{x\to\infty} 3(4+2/x) = 12$ sehingga $\rightarrow L = e^{12}$

Jadi, $\lim\limits_{x\to\infty} (1+3/x)4x+2 = e12$

Contoh 8. Diketahui, $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + 12x)3/x$ hitunglah L!

$L = \lim\limits_{x\to\infty} (1+12x)^{3/x}$

$\text{In } L = \text{In} \lim\limits_{x\to\infty} (1+12x)^{3x} = \lim\limits_{x\to\infty} (3/x) \text{ In } (1 + 12x)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} (3x).(1 + 12x) \left[\frac{\text{In}[1+12x]}{1+12x}\right]$

$= \text{In} \lim\limits_{x\to\infty} (3/x + 36)$

$= 36$ sehingga $\rightarrow L = e^{36}$

Jadi, $\lim\limits_{x\to\infty} (1+12x)^{3/x} = e^{36}$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Hitunglah limit-limit fungsi berikut ini:

   a. $\lim\limits_{x\to -1} (5x^2 - 4x + 1)$ b. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2+3x-2}{2x-1}$ c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{(x+1)}}{x}$

   c. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)}}$ e. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ f. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$

   g. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{(9+1)}-3}{x}$ h. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{x-4}$ i. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{(x^2+1)}-x}{\sqrt{(1-x)}}$

2. Jika $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 2$ dan $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$, hitunglah:

   a. $\lim\limits_{x\to a} [(x) + 4g(x)]$ b. $\lim\limits_{x\to a} (4g(x) - f(x))$ c. $\lim\limits_{x\to a} f(x)(3g(x)-3)$

   d. $\lim\limits_{x\to a} [3h(x) + f(x)]$ e. $\lim\limits_{x\to a} (h(x)-2)$ f. $\lim\limits_{x\to a} g(x)(h(x)-4)$

3. Tentukan $\lim\limits_{h\to o} \frac{f(x+b)-f(x)}{b}$ jika diketahui $f(x) = 4x^4 + x^3 + x + 9$

4. Periksalah apakah $f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+8}{x-1}$ ada atau tidak!

5. Periksalah apakah $\lim\limits_{x\to o} f(x) = \lim\limits_{x\to o} f(x) = 1/x$ ada atau tidak!

6. Hitunglah limit-limit berikut:

a. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \dfrac{9x+12}{6x-20}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\ \dfrac{8x^2-20x+10}{9x^2-4}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{8x^2-3x+100}{2x^2-x}$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\ \dfrac{5x^2-4x+3}{x^2+x+6}$

e. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \sqrt{(x^2+x)} - \sqrt{(x^2-x)}$

f. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \sqrt{(x^2+x) + x}$

7. Selidikilah kontinuitas limit fungsi berikut ini:

a. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ untuk x = 1

b. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{untuk } x < 0 \\ x+2 & \text{untuk } x > 0 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{untuk } x \neq -1 \\ -1 & \text{untuk } x = -1 \end{cases}$

8. Hitunglah masing-masing limit fungsi berikut ini:

a. $L = \lim\limits_{x\to\infty} (1 + 2/x)^{5x-1}$

b. $L = \lim\limits_{x\to\infty} (1 + 10/x)^{2/x}$

c. $L = \lim\limits_{x\to\infty} (1 + 5/x)^{4x}$

d. $L = \lim\limits_{x\to\infty} (1 + 3/x)^{3/x}$

BAGIAN TIGA

KALKULUS

BAB VIII
KALKULUS DIFERENSIAL

Suatu hal yang sangat penting dalam cabang ilmu matematika adalah mengenai konsep diferensial. Istilah-istilah laju pertumbuhan penduduk, kecepatan kendaraan, peluruhan radioaktivitas, laju penyebaran penyakit sudah banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Dalam bab ini akan diuraikan bagaimana istilah-istilah semacam itu ditafsirkan melalui konsep dasar matematika yang dikenal sebagai turunan fungsi yang merupakan tahapan awal studi tentang kalkulus diferensial.

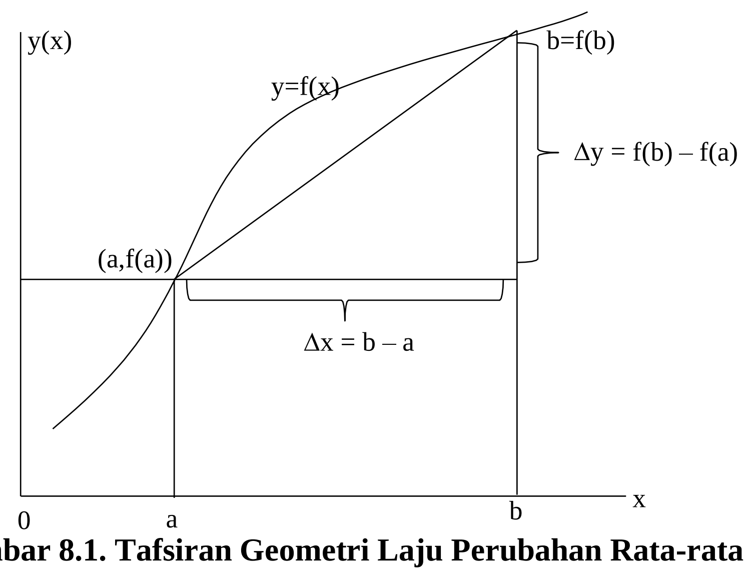
8.1 LAJU PERUBAHAN RATA-RATA

Laju perubahan rata-rata suatu fungsi y = f(x) dalam daerah interval a < x <b, dengan a < b, dituliskan:

$$\mathrm{LPR}[a,b] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad 8 - 1$$

Laju perubahan rata-rata ini dapat ditafsirkan secara geometris sebagai ukuran kecuraman atau kemiringan garis lurus yang menghubungkan pasangan titik-titik [a.f(a)] dan [b.f(b)] seperti pada Gambar 8.1.

Pada fungsi linear y = f(x) = mx + b, laju perubahan rata-rata (Δy/Δx) selalu sama dengan m (kemiringan) dalam setiap himpunan bagian daerah definisinya. Sebaliknya, laju perubahan rata-rata suatu fungsi kurva linear f(x) berubah-ubah menurut gerakan berurutan sepanjang kurva



Gambar 8.1. Tafsiran Geometri Laju Perubahan Rata-rata

Contoh 1. Laju perubahan rata-rata fungsi linear y = f(x) = 5x + 4 sebesar 5 dalam setiap himpunan bagian daerah definisinya yaitu:

$$\mathrm{LPR}_{[a,b]} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(5b + 4) - (5a + 4)}{b - a}$$

$$= \frac{5(b + a)}{b - a} = 5$$

Oleh karena itu, untuk sembarang bilangan nyata a > 0 diperoleh:

$$\mathrm{LPR}_{[a,b]} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[m(a + 1) + 4] - [m(a) + 4]}{(a + 1) - a}$$

= m(a + I) – m(a)

Besarnya kenaikan atau penurunan ordinat fungsi linear untuk setiap pertambahan satu absis sama dengan LPR-nya.

Adakalanya laju perubahan suatu faktor terhadap faktor lain diketahui, sedangkan model fungsi yang sesungguhnya antara kedua faktor tersebut tidak diketahui. Pada kondisi ini, nilai-nilai fungsi tersebut dapat dihampiri dengan menggunakan laju perubahan rata-ratanya.

8.2 LAJU PERUBAHAN SESAAT

Seperti yang telah dikemukakan di atas, laju perubahan rata-rata fungsi y = f(x) kontinu pada suatu selang waktu tertentu yang secara geometri ditafsirkan sebagai kemiringan yang menghubungkan sepasang titik tertentu pada kurva fungsi tersebut.

Laju perubahan sesaat diperoleh melalui proses limit terhadap laju perubahan rata-rata fungsi y = f(x) dengan cara membuat Δs menuju nol. Dengan demikian yang dimaksud dengan laju perubahan sesaat pada x = c dituliskan sebagai:

$$\mathrm{LPS}_{(c)} = \lim_{\Delta \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad 8 - 2$$

Dengan memisalkan x = c+Δx atau Δx = x – c, maka Δx → o mempunyai arti yang sama dengan x-c. Oleh karena itu bentuk limit di atas dapat pula ditulis menjadi,

$$\mathrm{LPS}_{(c)} = \lim_{\Delta \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to o} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \qquad 8 - 3$$

Untuk sembarang fungsi y = f(x) dan bilangan nyata c, kita dapat mengevaluasi dan menghitung ada tidaknya nilai limit tanpa memandang bentuk maupun tafsiran geometrisnya. Jika nilai limit ini ada pada titik di sekitar x = c, maka secara matematis disebut turunan fungsi y = f(x) di titik x = c. Proses untuk mendapatkan turunan semacam ini disebut pendiferensiasian fungsi y = f(x). Fungsi f(x) yang mempunyai turunan di titik x = c dikatakan terdiferensialkan di c.

Terminologi yang formal untuk menuliskan turunan di x = adalah:

$$f(c) = \lim_{x \to x} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad 8 - 4$$

atau

$$f(c) = \lim_{x \to o} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \qquad 8 - 5$$

jika nilai limit ini ada.

Ada juga penulisan lambang turunan yang diperkenalkan oleh ahli matematika kebangsaan Jerman yaitu Gottfried Leibnitz (1646 – 1716):

$$\frac{dy}{dx}| x = c \text{ atau } \frac{df(x)}{dx}| x = c \text{ atau } f_x \text{ atau } \frac{dy(c)}{dx}|$$

8.3 KAIDAH-KAIDAH DIFERENSIASI

Proses penurunan sebuah fungsi y = f(x) disebut juga proses pendiferensian atau diferensiasi yaitu mencari perubahan y berkenaan dengan suatu perubahan x apabila perubahan x yaitu Ax → 0. Hasil yang diperoleh dari proses pendiferensiasian tersebut disebut turunan atau derivatif.

Ada kaidah-kaidah pendiferensian dari suatu fungsi, dengan mengetahui turunan fungsi-fungsi tersebut dapat pula ditentukan turunan dari beberapa fungsi lainnya.

8.3.1 Kaidah Fungsi Konstan

Suatu turunan fungsi konstan f(x)=k, dimana & adalah suatu konstanta adalah nol.

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{(k) - (k)}{x - c} \qquad 8 - 6$$

Jadi f'(x) = 0 untuk semua bilangan nyata x.

Oleh karena f(x) konstan, maka f(x) tidak berubah untuk setiap perubahan x. Dengan demikian f'(x) = 0 tanpa memperhatikan berapapun perubahan variabel x.

Contoh 2. Tentukan hasil turunan dari fungsi-fungsi konstan berikut ini: (a) f(x) = 12, (b) f(x) = -9 dan (c) f(x) = 11 di sekitar x = 3.

1. f(x) = 12, fungsi turunannya f'(x) = 0, pada x = 3 f(3) = 0
2. f(x) = -9, fungsi turunannya f'(x) = 0, pada x = 3 f(3) = 0
3. f(x) = 11, fungsi turunannya f'(x) = 0, pada x = 3 f(3) = 0

8.3.2 Kaidah Fungsi Linear

Turunan fungsi linear f(x) = ax + b dimana badalah suatu konstanta adalah sama dengan a yaitu sama dengan koefisien dari x.

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{(ax + b) - (ac + b)}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{a(x - c)}{x - c} = a \qquad 8 - 7$$

Contoh 3. Tentukan fungsi-fungsi turunan dari fungsi-fungsi linear berikut ini yaitu: (a) f(x) = 8x – 3; (b) f(x) = 7 – 3x dan (c) f(x) = -x + 9 dan hitunglah nilai fungsi turunan di sekitar x = 5.

1. f(x) = 8x – 3, fungsi turunan f(x) = 8, pada x = 5 f(5) = 8
2. f(x) = 7 – 3x, fungsi turunan f(x) = -3, pada x = 5 f(5) = -3
3. f(x) = -x + 9, fungsi turunan f(x) = -1, pada x = 5 f(5) = -1

8.3.3 Kaidah Fungsi Pangkat

Turunan fungsi pangkat f(x) = x² adalah sama dengan eksponen n dikalikan dengan variabel x dipangkatkan n-1 dengan n bilangan asli.

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{x^n - c^n}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{(x - c)(x^{n-1} + cx^{n-1} + \cdots c^{n-3}x^{-2} + x^{-2} + x^{n-2}x + x^{n-1})}{x - c}$$

$= c^{n-1} + c^{n-1} + \cdots + c^{n-1} + c^{n-1}$ ada sebanyak n suku maka:

$f'(c) = nc^{n-1}$ 8-8

Jadi $f'(x) = nx^{n-1}$ untuk semua bilangan nyata x

Dalam hal ini, hasil turunan fungsi f yaitu f'(x) disebut turunan pertama fungsi f. Kalau fungsi f'(x) itu juga terdiferensialkan dalam daerahnya maka turunan merupakan fungsi yang dilambangkan dengan f''(x) yang disebut turunan kedua fungsi f. Pendiferensialan dapat dilanjutkan lagi sehingga diperoleh turunan ketiga, turunan empat sampai ke turunan ke-n.

Secara umum lambang-lambang turunan sampai ordo ke-n dituliskan:

f'(x)	atau	$\frac{d}{dx}f(x)$	turunan pertama
f'''(x)	atau	$\frac{d^2}{dx^2}f(x)$	turunan kedua
f'''(x)	atau	$\frac{d^3}{dx^3}f(x)$	turunan ketiga
f''(x)	atau	$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{d}{dx}[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f(x)]$	turunan ke – n n = 2,3,4………..

Contob 4. Tentukan tuan-turunan dari fungsi pangkat f(x) = x4 – 6x.

1. Turunan $f(x) = x^4 - 6x$	$f'(x) = 4x^3 - 6$	pada x = 2, f'(2) = 26
2. Turunan $f(x) = 4x^3 - 6$	$f''(x) = 12x^2$	pada x = 2, f''(2) = 48
3. Turunan $f(x) = 12x^2$	f'''(x) = 24x	pada x = 2, f'''(2) = 48
4. Turunan f(x) = 24x	f''''(x) = 24	pada x = 2, f''''(2) = 24
5. Turunan f''''(x) = 24	f''''(x) = 0	pada x = 2, f''''(2) = 0

8.3.4 Kaidah Penjumlahan dan Pengurangan

Turunan bentuk penjumlahan (pengurangan) f(x) = u(x) ± v(x) adalah sama dengan penjumlahan (pengurangan) dari turunan-turunan fungsi individu yaitu f(x) = u(x) ± v'(x).

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{[u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)] \pm [u(x) + v(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to o} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to o} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$= u'(x) \pm v'(x) \qquad 8-9$$

Dengandemikian untuk fungsi f(x) = u(x) ± v(x) ± v(x) ± w(x) ± z(x) fungsi turunanya adalah:

$$\frac{d}{dx}[u(x) \pm w(x) \pm z(x)] = \frac{d}{dx}u(x) \pm \frac{d}{dx}v(x) \pm \frac{d}{dx}w(x) \pm \frac{d}{dx}z(x)$$

Contoh 5. Tentukan turunan dari fungsi-fungsi penjumlahan/pengurangan berikut ini:

1. $f(x) = 2x^2 - x + 2$ turunannya $f'(x) = 4x - 1$, pada $x = 8$ $f'(8) = 31$
2. $f(x) = 2x^2 + 3x$ turunannya $f'(x) = 4x + 3$, pada $x = 1$ $f'(1) = 7$
3. $f(x) = 2x^2 + x - 2$ turunannya $f'(x) = 4x + 1$, pada $x = 2$ $f'(2) = 9$

8.3.5 Kaidah Perkalian

Turunan bentuk perkalian $f(x) = u(x).v(x)$ adalah sama dengan fungsi pertama dikalikan turunan fungsi kedua ditambah fungsi kedua dikalikan dengan turunan fungsi pertama.

Jika Δx merupakan pertambahan dalam x yang menyebabkan pertambahan masing-masing u,v dan y sebesar Δu. Δv dan Δy selanjutnya:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v \qquad 8\text{-}10$$

Karena y = (uv), maka rumus dengan mengatur kembali dan membaginya dengan Δx diperoleh:

$$\frac{\Delta y}{\Delta dx} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x} \qquad 8-11$$

Pada $\Delta x \rightarrow 0$, maka: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{dy}{dx}$ dan $\frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow \frac{dv}{dx}$ dan $\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow \frac{du}{dx}$

Sehingga:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to o}\frac{\Delta y}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to o}\left[\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta v\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]$$

$$= u\lim_{\Delta x \to o}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\lim_{\Delta x \to o}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \left[\lim_{\Delta x \to o}\Delta u\right]\left[\lim_{\Delta x \to o}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]$$

Karena $\Delta u = 0$, maka fungsi turunan menjadi:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \qquad 8-12$$

Contoh 6. Diketahui fungsi $y = f(x) = 2x^2(3x + 2)$ tentukan fungsi turunannya pada x = 1.

Misalkan $u = 2x^2$ dan $v = 3x + 2$. Masing-maing kita turunkan sehingga du/dx = 4x dan dv/dx = 3. Dengan mensubstitusikan pada rumus di atas.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 2x^2(3) + 4x(3x + 2)$$

$$= 6x^2 + (12x^2 + 8x)$$

Pada x = 1, f'(1) = $18(1)^2 + 8(1) = 26$

8.3.6 Kaidah Hasil Bagi

Turunan bentuk hasil bagi f(x) = u(x)/v(x) adalah sama dengan penyebut kali turunan pertama pembilang dikurangi pembbilang kali turunan pertama penyebut, semuanya dibagi kuadrat penyebutnya. Misalkan u = f(x). v(x), maka:

u'(x) = f(x).v'(x) + f'(x).v(x)

f'(x).v(x) = u'(x) – f(x).v'(x)

$$f'(x) = \frac{u'(x) - f(x)v'(x)}{v(x)}$$

Karena f(x) = u(x)/v(x), maka bentuk terakhir dapat ditulis menjadi,

$$f'(x) = \frac{u'(x) - \frac{u(x)}{v(x)}v'(x)}{v(x)} = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2} \qquad 8-13$$

Contoh 7. Carilah turunan fungsi f(x) = 3x(5x – 4) dan hitunglah pada x = 0, x = 1 dan x = 2.

Misalkan: u = 3x $\rightarrow$ du/dx = 3

v = 5x – 4 $\rightarrow$ dv/dx = 5

a. Masing-masing turunan disubsidikan pada rumus 8-13 diperoleh:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{3(5x-4) - 3x(5)}{(5x-4)^2} = \frac{15x - 12 - 15x}{(5x-4)^2} = \frac{-12}{(5x-4)^2}$$

b. Pada x = 0,f'(0) = $\frac{-12}{(5(0)-4)^2}$ = -0,75

Pada x = 1,f'(1) = $\frac{-12}{(5(0)-4)^2}$ = -12

Pada x = 2,f'(2) = $\frac{-12}{(5(0)-4)^2}$ = -0,33

8.3.7 Kaidah Berantai

Suatu fungsi turunan (dy/dx) fungsi dari fungsi y = f(g) dimana g = h(x) adalah sama dengan turunan fungsi pertama berkaitan dengan g dikalikan dengan turunan fungsi kedua berkaitan dengan x.

Bentuk yang lebih populer dari aturan rantai adalah sebagai berikut: Misalkan y = f $_o$ g dimana f(g) dan g = h(x) masing-masing mempunyai turunan di setiap titik, maka (f $_o$ g $_o$ h) juga mempunyai turunan di setiap titik dan berlaku:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Jika y = f(z), z = g(t) dan t = h(x), fungsi f, g dan h ketiga-tiganya mempunyai turunan di setiap titik, maka (fog-h) juga mempunyai turunan di setiap titik dan berlaku:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dz}{dx} \qquad 8-14$$

Contoh 8. Jika y = (x^2 + 5) tentukanlah fungsi turunannya dan hitung turunan fungsi tersebut pada x = I dan x = 2.

Misalkan: u = x^2 + 5 $\rightarrow$ du/dx = 2x

y = u2 $\rightarrow$ dy/dx = 2u

a. Dengan kaidah berantai selanjutnya diperoleh,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u(2x) = 4xu$$

Karena u = x^2 + 5 selanjutnya fungsi turunan dy/dx menjadi,

$$\frac{dy}{dx} = 4x(x2 + 5) = 4x^3 + 20x$$

b. Pada x = 1, f(1) = 4$(1)^3$ + 20(1) = 24

Pada x = 2, f(2) = 4$(2)^3$ + 20(2) = 72

8.3.8 Kaidah Logaritma

Suatu fungsi logaritma f(x) = ^{a}log g(x) dapat dicari fungsi turunannya yaitu:

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{\text{In } a} \qquad 8-15$$

Contoh 9. Jika f(x) = ^{e}log (3x + 8), Carilah f(x)!

Misal: g(x)= 3x + 8 dan g'(x) = 3.

Dengan mensubstitusikan pada persamaan diatas pada rumus 8-15 diperoleh:

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{\text{In } a} = \frac{3}{(3x + 8)\text{ In } e} \text{ karena basis } (a = e) \text{ dan In } e = 1$$

$\text{Jadi}, f'(x) \frac{3}{(3x+8)}$

Contoh 10. Jika f(x) = In $(2x + 3)^2$, Carilah f' (x)!

Misal: g(x) = $(2x + 3)^2$ dan g'(x) = 4(2x + 3)

Dengan mensubstitusikan pada persamaan di atas pada rumus 8-15 diperoleh:

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} . \frac{1}{\text{In } a} = \frac{4(2x+3)}{(2x+3)^2 \text{ In } e} \text{ untuk In } e = 1, \text{maka}$$

$$f'(x) = \frac{4}{(2x+3)}$$

8.3.9 Kaidah Eksponensial

Dengan menggunakan aturan rantai kita dapat mencari fungsiyang berbentuk f(x) = $g(x)^{h(x}$), dimana g(x) > 0 untuk setiap himpunan definitif x. Kaidah eksponensial ini juga dapat membuktikan rumus-rumus turunan yang berbentuk f(x) = g(x)-h(x) atau f(x) = g(x)/h(x).

1. Jika g dan h keduanya mempunyai turunan, g> 0 dan f(x) = g(x)h(x), hitunglah f'(x).

   Dari f(x) = g(x)h(x) diperoleh In |f(x)| =h(x). In|g| Jadi,

   $$f'(x) = f(x) \frac{g'(x)}{g(x)} + h'(x). \text{In}|g(x)$$

   $$f'(x) = f(x) [h(x). \frac{g'(x)}{g(x)} + h'(x). \text{In}|g|(x)] \qquad 8-16$$

Contoh 11. Hitunglah f(x) jika f(x) = e^{3x4}

Misal: g(x) = e $\rightarrow$ g'(x) = 0

h(x) = 2x – 4 $\rightarrow$ h'(x) = 2

Dengan mensubstitusikan pada rumus 8-16 di atas maka,

$$f'(x) \quad = e^{2x-4} [(2x-4). \frac{0}{e} + 2. \text{In}|e|]$$

= $e2^{x-4}$ (2 In e) $2e^{2x-4}$

Contoh 12. Hitunglah f'(x) jika f(x) = ax.

Misal: g(x) = a $\rightarrow$ g'(x) = 0

h(x) = x $\rightarrow$ h'(x) = 1 menjadi,

$$f'(x) = a^x\,[1.\frac{0}{a} + \mathrm{In}|a|]$$

$$= a^x[0 + \mathrm{In}|a|]$$

Jadi, f'(x) = ax In a

Contoh 13. Hitunglah f'(x) jika f(x) = x^x.

Misal: g(x) = x $\rightarrow$ g'(x) = 1

h(x) = x $\rightarrow$ h'(x) = 1 menjadi,

$$f'(x) = x^x\,[x.\frac{1}{x} + 1.\mathrm{In}(x)]$$

$$= x^x[1 + \mathrm{In}(x)]$$

Rumus turunan dalam bentuk perkalian f(x) = g(x).h(x) ataupun dalam bentuk pembagian f(x) = g(x)/h(x) dapat juga dicari fungsi turunannya dengan mengambil logaritmanya.

Bentuk perkalian : In f(x) = In g(x) + In h(x) dan

Bentuk pembagian : In f(x) = In g(x) – In h(x)

Dapat dituliskan, $\frac{f^F(x)}{f(x)} = \frac{g^F(x)}{g(x)} \pm \frac{h^F(x)}{h(x)}$

Dengan menjadikan dengan faktor f(x) pada masing-masing ruas, maka bentuk fungsi turunan menjadi :

$$f'(x) = f(x)\,[\frac{g'(x)}{g(x)} \pm \frac{h'(x)}{h(x)}] \qquad 8-17$$

Contoh 14. Htunglah f'(x) jika f'(x) = $(3x – 4)^3$

Misal: g(x) = 3x – 4 $\rightarrow$ g'(x) =3

h(x) = $(3x – 4)^2$ $\rightarrow$ h'(x) = 6(3x – 4)

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{3}{(3x-4)} + \frac{6(3x-4)}{(3x-4)^2}$$

$$= \frac{3}{(3x-4)} + \frac{6}{(3x-4)} = \frac{9}{(3x-4)}$$

$$f'(x) = (3x - 4)^3 = (\frac{9}{3x-4})$$

$= 9(3x - 4)^2$

Contoh 15. Hitunglah f'(x) jika $f(x) = (3x - 2)/e^x$

Misal: $g(x) = 3x - 2 \rightarrow g(x) = 3$

$h(x) = e^x \rightarrow h(x) = e^x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{3}{(3x-2)} + \frac{e^x}{e^x}$$

$$= \frac{3}{(3x-2)} - 1 \frac{-3+5}{(3x-2)}$$

$$f'(x) = (\frac{3x-2}{e^x})(\frac{-3x+5}{3x-2})$$

$$= \frac{(-3x+5)}{e^x}$$

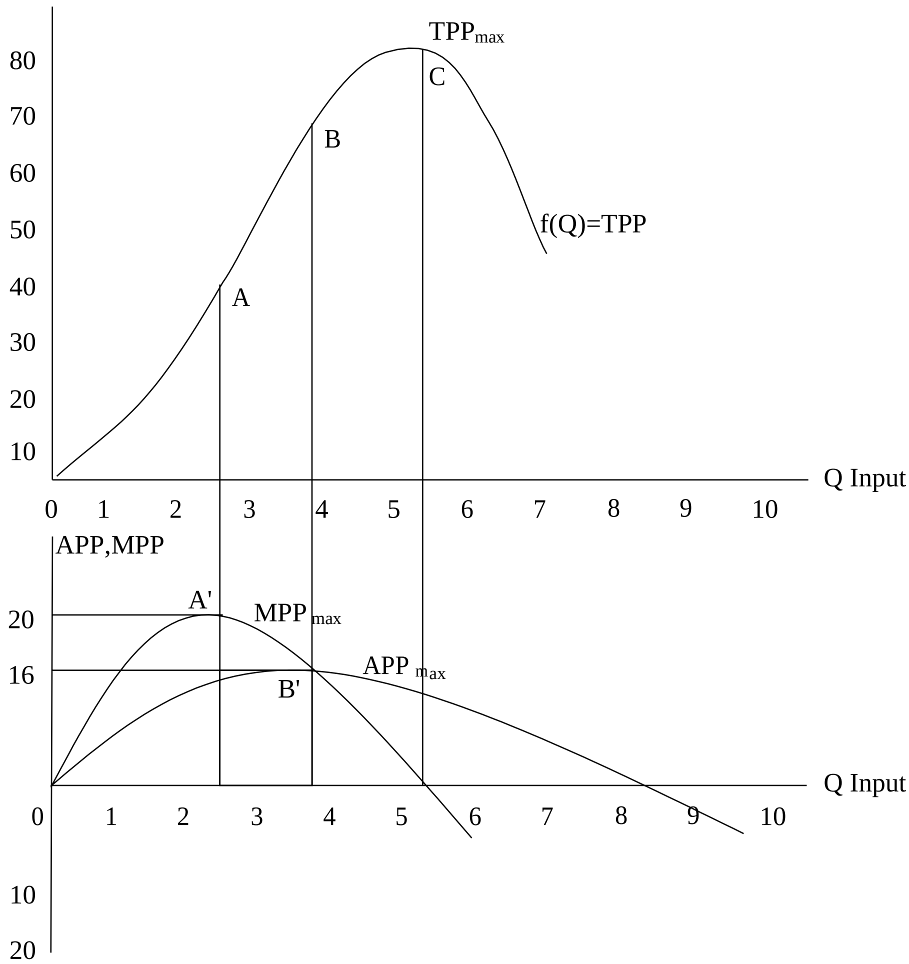
8.4 KONSEP MARGINAL

Istilah marginal digunakan pada perubahan sedikit demi sedikit (*incemental*) pada pendapatan, biaya, produksi, keuntungan, *cash-flow* dan juga input output. Secara matematik pendapatan marginal dan biaya marginal dapat diturunkan dari fungsi total masing-masing.

8.4.1 Produksi Marginal

Produksi Fisik Marginal (*Marginal Physical Products* atau MPP) seperti yang telah dijelaskan sedikit pada Bab VII, didefinisikan sebagai output tambahan yang dihasilkan dari adanya penggunaan satu unit tambahan input (MPP = $\Delta TPP/\Delta Q$). Jika perubahan $\Delta Q \rightarrow 0$, maka turunan pertama dari fungsi produksi marginal dinyatakan sebagai:

$$MPP = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta TPP}{\Delta Q} = \frac{\partial TPP}{\partial Q} \qquad 8-18$$



Gambar 8.2. Kurva Fungsi Produksi (TPP, MPP dan APP).

Produksi fisik rata-ratanya akan sama dengan marginal produksi fisik (APP = MPP) yaitu pada saat produksi rata-rata mencapai maksimun. Secara geometris, dapat ditunjukkan oleh perpotongan kurva produksi rata-rata pada posisi maksimuan dengan karya produksi marginalnya (Gambar 8.2).

1. Mula-mula kurva TPP mengalami kenaikan hasil bertambah sampai mencapai titik belok (*inflection point*) di A. MPP terus naik sampai mencapai maksimum di A, sedangkan APP terus naik akan tetapi masih berada di bawah MPP.
2. Setelah mencapai titik B, TPP mengalami kenaikan hasil berkurang. MPP mulai berkurang akan tetapi APP masih naik. APP maksimum terjadi pada titik B dimana pada titik tersebut MPP = APP. Setelah mencapai maksimum APP mulai menurun akan tetapi disini kurva APP terletak di atas kurva MPP.

3. Pada saat TPP mencapai maksimum di C, kurva MPP = 0. Setelah proses ini dilalui. TPP mulai turun dan MPP mulai bernilai negatif.

Contoh 16. Fungsi produksi ditunjukkan oleh persamaan $P = 60Q^2 – Q^3$ di mana P output produksi dan Q input produksi:

a. Carilah fungsi produksi marginal dan fungsi produksi rata-rata.
b. Hitunglah produksi total, produksi marginal dan produksi rata-rata jika digunakan input sebanyak Q = 10 unit.
c. Berapa total produksi maksimumnya.

Diketahui fungsi produksi $P = TPP = 60Q^2 – Q^3$

a. Fungsi produksi marginal, $MPP = dTPP/dQ = 120Q – 3Q^2$
b. Fungsi produksi rata-rata, $APP = TPP/Q = 60Q – Q^2$

   Pada Q = 10 unit, TPP $= 60(Q)^2 – Q^3 = 60(10)^2 – (10)^3$
   $= 6.000 – 1.000 – 5.000$
   MPP $= 1200 – 3Q =120(10) – 3(10)^3$
   $= 1.200 – 300 = 900$
   APP $= 60Q – Q2 = 60(10) – (10)^2$
   $= 600 – 100 = 500$

c. Total produksi maksimum (TPP) dicapai pada saat MPP = 0.
   Yaitu,
   $120Q – 3Q^2 = 0 \rightarrow Q(120 – 3Q) = 0$ diperoleh Q = 120/3 = 40 unit
   Jadi, TPP maksimum $= 60(40)^2 – (40)^3 = 96.000 – 64.000$
   $= 32.000$

8.4.2 Pendapatan Marginal

Pendapatan Marginal (*Marginal Revenue* atau MR) dapat didefinisikan sebagai perubahan pendapatan total (TR) yang diakibatkan oleh penjualan suatu barang tambahan yaitu:

$$MR = \frac{dTR}{dQ} \qquad 8-19$$

Sebagaimana yang dijelaskan pada Bab VI. pendapatan rata-rata dapat dinyatakan sebagai pendapatan total (TR) yang dihasilkan dari setiap unit barang yang ditawarkan atau diminta yaitu AR = TR/Q. Pada saat pendapatan rata-rata mencapai maksimum maka pendapatan rata-ratanya sama dengan pendapatan marginalnya (AR = MR).

Contoh 17. Diberikan suatu fungsi permintaan yang ditunjukkan oleh persamaan Q = 20 – P.

a. Carilah fungsi pendapatan marginal yang berhubungan dengan fungsi permintaan tersebut.
b. Hitunglah pendapatan marginal dan rata-rata pada Q = 3 unit, Q = 5 unit dan Q = 7,5 unit.

Fungsi permintaan, Q = 15 – P diubah menjadi, P = 15 – Q

Fungsi pendapatan total, TR = P – Q = (15 – Q) Q = 15Q – Q^2

a. Fungsi pendapatan marginal, MR = $\frac{dTR}{dQ}$ = 15 – 2Q

   Pada Q = 3 unit, MR = 15 – 2(3) = 9

   Pada Q = 5 unit, MR = 15 – 2(5) = 5

   Pada Q = 7,5 unit, MR = 15 – 2(7,5) = 0

b. Fungsi pendapatan rata-rata, AR = $\frac{TR}{Q} = \frac{15Q - Q^2}{Q}$ = 15 – Q

   Pada Q = 3 unit, AR = 15 – (3) = 12

   Pada Q = 5 unit, AR = 15 – (5) = 10

   Pada Q = 7,5 unit, AR = 15 – (7,5) = 7,5

8.4.3 Biaya Marginal

Biaya Marginal (*Marginal Cost* atau MC) didefinisikan sebagai perubahan dalam biaya total (TC) yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan output.

$$MC = \frac{dTC}{dQ} \qquad 8-20$$

Biaya rata-rata (AC) merupakan hasil bagi biaya total terhadap jumlah barang yang diproduksi yang dinyatakan sebagai AC = TC/Q. Pada saat biaya rata-rata mencapai minimum maka biaya rata-rata sama dengan biaya marginalnya (AC = MC).

Contoh 18. Jika fungsi biaya suatu perusahaan dicerminkan oleh persamaan TC = $0{,}5Q^2 + 2Q + 20$. Ditanyakan: (a) Carilah fungsi biaya marginal dan (b) Fungsi biaya rata-ratanya pada Q = 2 unit dan Q = 4 unit.

Diketahui: Fungsi biaya total. TC = $0{,}5Q^2 + 2Q + 20$

a. Fungsi biaya marginal, MC = Q + 2

   Pada Q = 2 unit, MC = (2) + 2 = 4

   Pada Q = 4 unit, MC = (4) + 2 = 6

b. Fungsi biaya rata-rata,

   $$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{0{,}5Q^2 + 2Q + 20}{Q} = 0{,}5Q + 2 + 20/Q$$

   Pada Q = 2 unit, AC = 0,5(2) + 2 + 20/(2)

   = 1 + 2 + 10 = 13

   Pada Q = 4 unit, AC = 0,5(4) + 2 + 20/(4)

   = 2 + 2 + 5 = 9

Contoh 19. Carilah fungsi biaya marginal untuk setiap fungsi biaya rata-rata berikut: (a). AC = $2Q^2 – 2Q + 10 + 50/Q$ dan (b). AC = Q + 2 + 1/Q.

a. Fungsi biaya rata-rata AC = $2Q^2 – 2Q + 10 + 50/Q$

   Fungsi biaya total TC = AC(Q) – $(2Q^2 – 2Q + 10 + 50/Q)Q$

   $= -2Q^1 – 2Q^2 + 10Q + 50$

   Fungsi biaya marginal, MC = $\frac{dTC}{dQ} = 6Q^2 – 4Q + 10$

b. Fungsi biaya rata-rata AC = Q + 2 + 1/Q

   Fungsi biaya total, TC = AC(Q) = (Q + 2 + 1/Q) Q = $Q^2 + 2Q + 1$

   Fungsi biaya marginal, MC = $\frac{dTC}{dQ} = 2Q + 2$

8.5 KONSEP ELASTISITAS

8.5.1 Elastisitas Harga

Untuk mengukur besar kecilnya perubahan jumlah barang yang diminta konsumen (ditawarkan oleh produsen) sebagai akibat perubahan harga dipakai parameter elastisitas harga (*price elasticity*). Suatu konsep yang sangat bermanfaat dalam ilmu ekonomi. Parameter ini menyatakan sebagai perbandingan antara persentase perubahan jumlah barang (Q) yang diminta (ditawarkan) dengan persentase perubahan harga (P). Secara matematis, % perubahan jumlah barang yang diminta perubahan jumlah barang yang diminta

$$\in = \frac{\%\ \text{perubahn jumlah barang yang diminta}}{\%\ \text{perubahan harga}} \qquad 8-21$$

Karena elastisitas ini merupakan rasio dari dua parameter maka perubahan harga tertentu, elastisitas akan besar atau kecil tergantung pada besar kecilnya perubahan jumlah barang yang diminta (ditawarkan). Namun begitu harus diingat bahwa konsep elastisitas ini selalu dipakai dalam pengertian relatif. Dengan demikian ada tiga keadaan elastisitas tersebut yaitu jika:

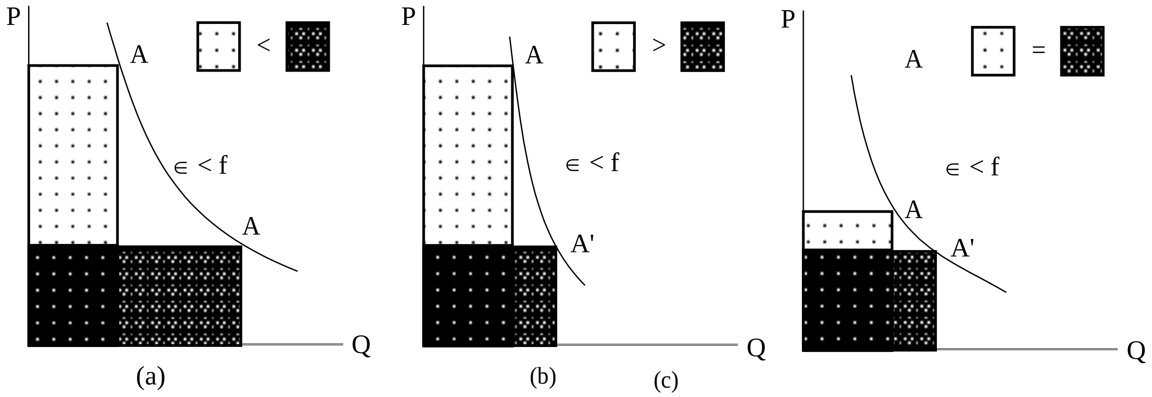
$|\in| > 1$ disebut elastis (elastic)

$|\in| < 1$ disebut tidak elastis (inelastic)

$|\in| = 1$ disebut elastis tunggal (unitary elastic)

Ketiga macam koefisien elastisitas di atas mempunyai implikasi yang berbeda-beda pada besarnya pendapatan sesudah adanya perubahan (penurunan) harga dibandingkan sebelumnya. Ketiga macam implikasi tersebut yaitu:

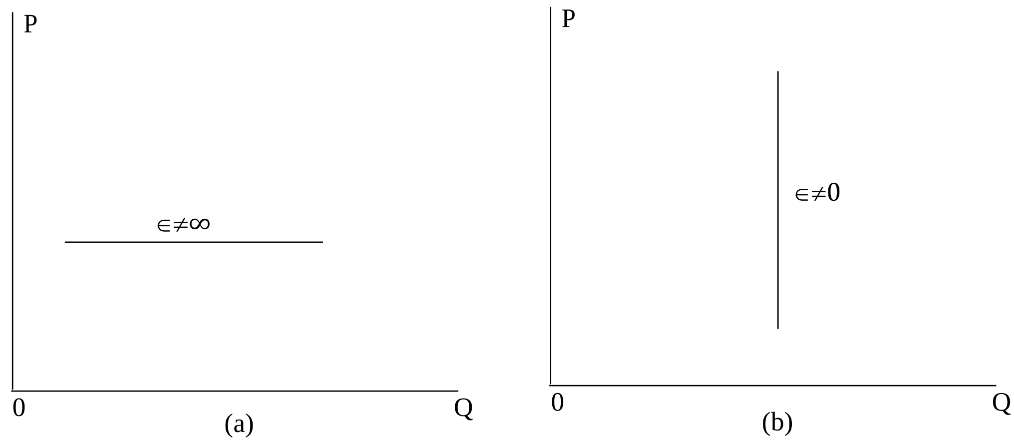
1. Penurunan harga P akan menyebabkan peningkatan volume penjualan barang Q, sehingga pendapatan total bertambah besar dibanding dengan pendapatan sebelumnya. Kurva permintaan dengan elastisitas $\in > 1$ (elastis), dikatakan kurva permintaan sangat peka terhadap perubahan harga (Gambar 8.3a).
2. Penurunan harga P akan menyebabkan peningkatan volume penjualan barang Q juga, akan tetapi pendapatan total lebih kecil dibanding dengan pendapatan sebelumnya. Kurva permintaan dengan tidak elastisitas $\in < 1$ (tidak elastis) dikatakan kurva permintaan tidak peka terhadap perubahan harga (Gambar 8.3b).
3. Penurunan harga P akan menyebabkan peningkatan volume penjualan barang Q, tetapi sedemikian rupa sehingga pendapatan total tetap sama dengan sebelum terjadi penurunan harga. Kurva permintaan dengan elastisitas $\in = 1$ (elastisitas tunggal) dikatakan kurva permintaan tidak berubah terhadap perubahan harga (Gambar 8.3c).



Gambar 8.3. Tiga Situasi Kasus Penurunan Harga

Disamping angka elastisitas sama dengan satu penting pula dicatat angka elastisitas nol atau tak terhingga yang walaupun secara praktis tidak penting tetapi dari segi teoritis sangat penting.

Pada elastisitas $|\in| = 0$ (tidak elastis sempurna) yaitu kurva permintaan merupakan garis vertikal yang berarti bahwa berapapun harga barang, jumlah yang diminta tidak akan terpengaruh. Sebaliknya pada elastisitas $|\in| = \infty$ (elastis sempurna), perubahan harga barang hanya mempunyai dua akibat yaitu jumlah barang yang diminta tak terhingga atau sama dengan nol yang ditunjukkan dengan garis horizontal (Gambar 8.4) Persoalan ini juga sama untuk kasus-kasus elastisitas penawaran.



Gambar 8.4. Elastisitas Sempurna dan Elastis Tidak Sempurna.

Adapun penulisan angka elastisitas ini sering ada tanda negatif ini menunjukkan bahwa harga naik diikuti penurunan jumlah yang diminta dan sebaliknya harga turun dengan kenaikan jumlah barang yang diminta.

Pengukuran angka elastisitas dalam praktek dapat dilakukan dengan dua cara yaitu:

8.5.1.1 Elatisitas Titik

Pada Gambar 8.5. ditunjukkan bahwa garis yang menyinggung kurva permintaan pada titik A menunjukkan elastisitas harga atas permintaan (*price elasticity of demand*) pada titik A atau dituliskan sebagai:

$$\in = \frac{\%\Delta Q}{\%\Delta P} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta Q/Q}{\Delta P}$$

$$\in = \frac{dQ/Q}{dP/P} \qquad \text{8-22}$$

Kadang-kadang orang ingin lebih sempurna menuliskan elstisitas sebagai bentuk diferensial:

$$\in = \frac{dQ}{dP}\cdot\frac{P}{Q} \quad \text{atau} \quad \in = \frac{1}{dP/dQ}\cdot\frac{P}{Q}$$

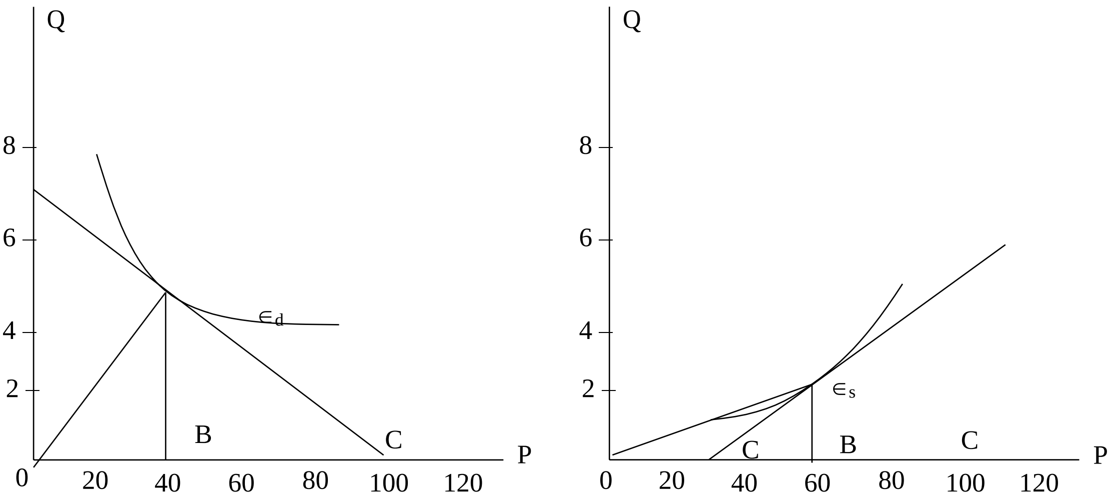
Elastisitas permintaan dan penawaran dapat dihitung secara visual seperti pada Gambar 9.5. Apabila Q = f(P) elastisitas harga permintaan (*prie elasticity of demand*) $\in_d$ pada titik tertentu sama dengan jarak horizontal titik tersebut dan titik asal (OB) dibagi dengan jarak horizontal titik tersebsut dari titik dimana garis singgung memotong sumbu datar (BC). Elastisitas harga penawaran (*price elasticity of supply*) $\in$, pada titik tertentu sama dengan jarak horizontal titik (OB) dibagi dengan jarak horizontal titik tersebut dari titik di mana garis singgung memotong sumbu datar (BC).

Elastisitas Permintaan

$$\in_d = \frac{OB}{BC} = \frac{40}{60} = -0{,}67$$

Elastisitas Penawaran

$$\in_s = \frac{OB}{BC} = \frac{60}{30} = 2{,}0$$



Gambar 8.5 Elastisitas Titik

Contoh 20. Fungsi permintaan barang ditunjukkan oleh persamaan = 10 – p^2. Hitunglah elastisitas permintaan pada tingkat harga P = 2 dan P = 3.

Fungsi permintaan: Q = 10 – P^2 → dQ/dP = -2P

a. Pada P = 2, Q = 10 – (2)2 = 6 dan dQ/dP = -2P = -4

   Dengan substitusi nilai-nilai tersebut, maka elastisitas permintaan:

$$\in = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dP}} \cdot \frac{P}{Q} = -4\left(\frac{2}{6}\right) = -1{,}33$$

b. Pada P = 3, Q = 10 – (3)2 = 1 dan dQ/dP – 2P = -6:

$$\in = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dP}} \cdot \frac{P}{Q} = -6\left(\frac{3}{1}\right) = -18$$

Contoh 21. Tentukan tingkat harga dari fungsi permintaan Q = 60 – 3P di mana nilai absolut dari elastisitas akan sama dengan atau lebih besar dari satu $|\in| \geq |$.

$\mathrm{Q} = 60 - 3\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{dQ}/\mathrm{dP} = -3$ dan $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{P}}{60 - 3\mathrm{P}}$

$$\in = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dP}} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} = -3\,\frac{\mathrm{P}}{60 - 3\mathrm{P}}$$

Untuk $|\in| \geq |$, 3P ≥ 60 – 3P

6P ≥ 60

P ≥ 10

Contoh 22. Fungsi penawaran barang dicerminkan oleh Q = P^2 + 3P + 2. Hitunglah elastisitas penawaran pada tingkat harga P = 4 dan P = 8.

Diketahui Q = P^2 + 3P + 2 → dQ/dP = 2P + 3

a. Pada P = 4, Q = $(4)^2$ + 3(4) + 2 = 30

   dQ/P = 2(4) + 3 = 11

$$\in = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dP}} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} = 11(4/30) = 1.47$$

b. Pada P = 8. Q = $(8)^2$ + 3(8) + 2 = 90

   dQ/dP = 2(8) + 3 = 19

$$\in = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dP}} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} = 19(8/90) = 1{,}69$$

Contoh 23. Fungsi penawaran barang dicerminkan oleh persamaan Q = 6P – 7. Hitung elastisitas penawaran pada tingkat harga P = 2, P = 4 dan P = 5.

Diketahui: Q = 6P – 7 → dQ/dP = 6

a. Pada P = 2, Q = 6(2) – 7 = 5

$$\epsilon = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = 6(2/5) = 2{,}40$$

b. Pada P = 4, Q = 6(4) – 7 = 17

$$\epsilon = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = 6(4/17) = 1{,}41$$

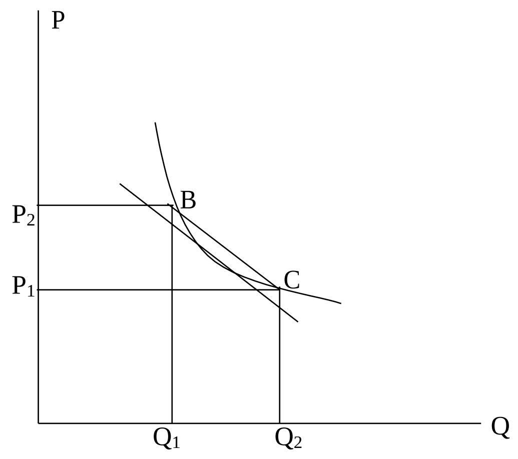
c. Pada P = 5, Q = 6(5) – 7 = 23

$$\epsilon = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = 6(5/23) = 1{,}30$$

8.5.1.2 Elastisitas Busur

Dalam praktek sehari-hari pengukuran nilai elastisitas dengan cara yang kedua yaitu elastisitas busur (*arc elasticity*). Seperti pada Gambar 8.6, elastisitas kurva di antara 2 titik B dan C, yang dihitung merupakan angka rata-rata dari elastisitas titik sepanjang kurva di antara dua titik tersebut. Allen mengajukan satu rumusan yang pada dasarnya mengambil rata-rata dari dua macam perubahan itu.

$$\epsilon = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{\frac{1}{2}(P_1 + P_2)}{\frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)}$$



Gambar 8.6 Elastisitas Busur

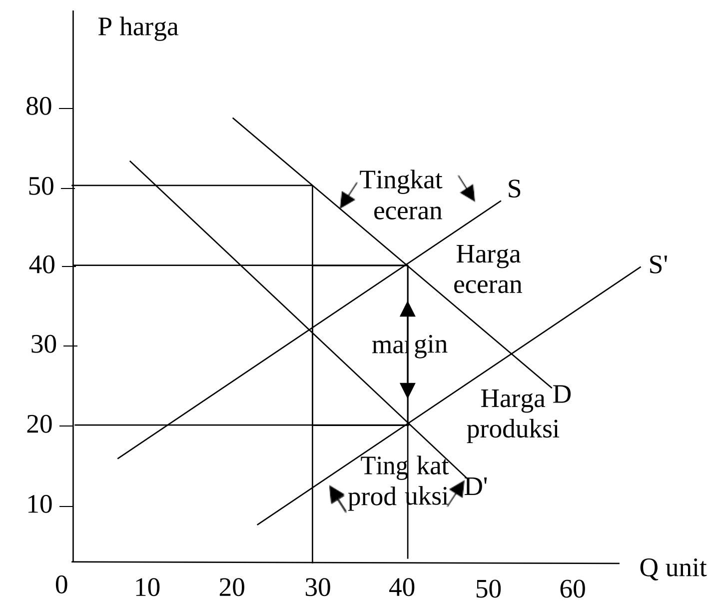
Pada kasus pembentukan harga pada tingkat eceran dan tingkat produsen, besarnya elastisitas harga pada kedua tingkat pasar yaitu lebih rendah (fleksibilitas harga lebih tinggi) pada tingkat produsen bila dibandingkan dengan tingkat eceran. Jika barang yang dibawa ke pasar turun dari $Q^1 = 40$ menjadi $Q^2 = 30$ harga pada kedua pasar naik Rp 10,- Dengan demikian pada saat kenaikan Rp 10,- pada tingkat eceran naik dari Rp 40,- ke Rp 50,- dan pada tingkat harga produsen berarti dari Rp 20,- ke Rp 30,-. Elastisitas harga tingkat eceran dan produsen adalah:

$$\text{Tingkat eceran: } \in \; = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \frac{\frac{1}{2}(P_1 + P_2)}{\frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)} = \frac{(40-30)}{(50-40)} \cdot \frac{\frac{1}{2}(40+50)}{\frac{1}{2}(40+30)}$$

$$= 1{,}286$$

$$\text{Tingkat produsen: } \in \; = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \frac{\frac{1}{2}(P_1 + P_2)}{\frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)} = \frac{(40-30)}{(30-20)} \cdot \frac{\frac{1}{2}(20+30)}{\frac{1}{2}(40+30)}$$

$$= 0{,}714$$



Gambar 8.7

Contoh 24. Suatu permintaan dan penawaran konsumsi beras selama bulan Nopember 1998 dilukiskan dalam tabel di bawah ini. Hitunglah:

Permintaan, Penawaran dan Pembentukan Harga Beras (Hipotesis)

Harga Beras (Rp. Per kg)	Permintaan (dalam Ton)	Penawaran (dalam Ton)
1.500	3.050	3.005
1.550	3.045	3.015
1.600	3.040	3.025
1.650	3.035	3.035
1.700	3.030	3.045
1.750	3.025	3.055
1.800	3.020	3.065
1.850	3.015	3.075

a. Elastisitas permintaan selama bulan Nopember 1998 dan

b. Elastisitas penawaran.

c. Bila jumlah barang yang diminta naik dari 3.030 ton menjadi 3.040 ton pada waktu harga nurun dari Rp 1.700,-/kg menjadi Rp1.600,-/kg. Tentukan elastisitas harga permintaannya

a. Elastisitas permintaan:

Dari tabel di atas diketahui P_1 = Rp 1.500,-

P_2 = Rp 1.850,-

Q_1 = 3.050 ton

Q_2 = 3.015 ton

$$\in_d = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot (P_1 + P_2)}{\frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_2)} = \frac{(3015 - 3050)}{(1850 - 1500)} \cdot \frac{\frac{1}{2}(1500 + 1850)}{\frac{1}{2}(3050 + 3015)}$$

$$= \frac{-35}{350} \cdot \frac{1675}{3032} = -0{,}06$$

b. Elastisitas Penawaran:

Dari tabel di atas diketahui P1 = Rp 1.500,-

P_1 = Rp 1.850,-

Q_1 = 3.005 ton

Q_2 = 3.075 ton

$$\in_d = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot (P_1 + P_2)}{\frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_2)} = \frac{(3075 - 3005)}{(1850 - 1500)} \cdot \frac{\frac{1}{2}(1500 + 1850)}{\frac{1}{2}(3005 + 3075)}$$

$$= \frac{70}{350} \cdot \frac{1675}{3040} = -0{,}11$$

a. Elastisitas Permintaan :

Diketahui: P1 = Rp 1.700,-

P2 = Rp 1.600,-

Q1 = 3.030 ton

Q2 = 3.040 ton

$$\in_d = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot (P_1 + P_2)}{\frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_2)} = \frac{(3040 - 3030)}{(1600 - 1700)} \cdot \frac{\frac{1}{2}(1700 + 1600)}{\frac{1}{2}(3030 + 3040)}$$

$$= \frac{10}{-100} \cdot \frac{1650}{3035} = -0{,}05$$

8.5.2 Elastisitas Silang

8.5.2.1 Elastisitas Silang dari Permintaan

Pada kenyataannya suatu permintaan barang tidak hanya dipengaruhi oleh tingkat harga barang, tetapi juga sangat dipengaruhi oleh harga-harga barang lainnya. Misalnya beras dan gandum, keduanya merupakan bahan makanan yang dipertukarkan/pengganti. Juga beras dan jagung, gula pasir dan gula merah. Karena sifatnya yang dapat dipertukarkan ini, maka harga masing-masing juga berkaitan erat. Dalam hal ini kita akan bicara mengenai elastisitas silang (*cross elasticity*) yang didefinisikan sebagai:

$$\in = \frac{\text{\% perubahan jumlah barang yang diminta atas barang A}}{\text{\% perubahan harga barang B}}$$

atau

$$\in = \frac{dQ_a}{dP_b} \cdot \frac{P_b}{Q_a} \qquad 8 - 24$$

Makin besar angka elastisitas silangnya, makin dekat hubungan antara kedua barang yang bersangkutan. Hal yang sangat penting dari angka elastisitas silang adalah tanda (positif dan negatif) di depannya.

e_{ab} = (+) : Barang A dan B merupakan barang pengganti/bersaingan (substitusi/ competitive goods). Artinya jika terjadi kenaikan harga salah satu barang akan diikuti oleh kenaikan permintaan atas barang lainnya. Contohnya adalah beras dan jagung. Adanya kenaikan harga beras, maka orang akan beralih mengkonsumsi jagung sehingga permintaan jagung akan naik (permintaan beras berkurang) meskipun harga jagung tidak berubah. Demikian juga gula pasir dan gula merah, minyak tanah dengan kayu bakar, daging ayam dengan daging sapi.

e_{ab} = (-): Barang A dan B merupakan barang pelengkap/saling melengkapi (complementary goods). Artinya jika terjadi penurunan harga salah satu barang akan diikuti oleh kenaikan jumlah permintaan atas kedua barang tersebut. Contohnya adalah kompor dengan minyak tanah, mobil dan ban, radio transistor dengan batu battery dan lain-lain.

e_{ab} = nol: Kedua barang A dan B disebut barang-barang yang tidak berkaitan (independent goods). Artinya jika terjadi kenaikan harga salah satu barang tidak mengakibatkan kenaikan atau penurunan jumlah permintaan atas barang lainnya, meskipun sebenarnya tidak berkaitan sama sekali juga tidak benar. Contohnya adalah sepatu pria dengan sepatu wanita. Adanya kenaikan harga sepatu pria konsumen pria tidak akan beralih memakai sepatu wanita.

Contoh 25. Fungsi permintaan akan dua macam barang A dan barang B masing-masing ditunjukkan oleh $Q_bP^2_b\ P_b = 2$ dan $Q_bP_aP_b - 3 = 0$. Hitunglah elastisitas permintaan masing-masing barang dan jelaskan bentuk hubungan antara kedua macam barang tersebut.

Diketahui: $Q_aP^2_a\ P_b - 2 = 0$ dan $Q_b\ P_a\ P_b - 3 = 0$

$$Q_a = \frac{2}{P_a{}^2 P_b} \qquad\qquad Q_b = \frac{3}{P_a{}^2 P_b}$$

$$\frac{dQ_a}{dP_a} = \frac{2}{P_a{}^3 P_b} \qquad\qquad \frac{dQ_b}{dP_a} = \frac{3}{P_a{}^2 P_b}$$

Elastisitas permintaan barang A,

$$\in_a = \frac{dQ_a}{dP_a} \cdot \frac{P_a}{Q_a} = \left[-\frac{4}{P_{a}{}^{3} P_b}\right]\left[\frac{P_a{}^2 P_b . P_a}{2}\right] = 2$$

Elastisitas permintaan barang B,

$$\in_b = \frac{dQ_b}{dP_b} \cdot \frac{P_b}{Q_b} = [-\frac{3}{P_a P_b{}^2}] [\frac{P_a P_b . P_b}{3}] = -1$$

Elastisitas silang permintaan:

$$\in_{ab} = \frac{dQ_a}{dP_b} \cdot \frac{P_b}{Q_a} = [-\frac{2}{P_a{}^2 P_b}] [\frac{P_a P_b . P_b}{3}] = -1 \text{ atau}$$

$$\in_{ba} = \frac{dQ_b}{dP_a} \cdot \frac{P_a}{Q_b} = [-\frac{3}{P_a{}^2 P_b}] [\frac{P_a P_b . P_b}{3}] = -1$$

- Barang A bersifat elastisitas $|\in_a| > 1$
- Barang B bersifat elastisitas unitary $|\in_b| = 1$
- Hubungan barang A dan B bersifat komplementer (elastisitas silang permintaanya negatif).

Contoh 26. Fungsi permintaan beras ditunjukkan oleh persamaan $Q_b = 3 - P_b + 2P_j$ dan jagung $Q_j = 3 + 2P_b - 2P_b - 2P_j$ dimana Q_b . Q_j jumlah permintaan beras dan jagung dan P_b . P_j, harga masing-masing beras dan jagung. Hitunglah elastisitas permintaan beras dan jagung dan jelaskan bentuk hubungan antara keduanya jika harga masing-masing $P_b = 3$ dan $P_j = 2$.

Diketahui: $Q_b = 3 - P_b + 2P_j - 2P_j$ $\quad$ $Q_j = 3 + 2P_b - 2P_j$

$dQ_d /dP_b = -1$ $\quad$ $dQ/dP_j = -2$

Pada $P_b = 3$, $P_j = 2$ diperoleh $Q = 3 - 3 + 2(2) = 4$

$Q = 3 + 2(3) - 2(2) = 5$

a. Elastisitas permintaan beras $\in_b = \frac{dQ_b}{dP_b} \cdot \frac{P_b}{Q_b} = [\frac{3}{4}] = -0{,}75$

Elastisitas permintaan beras $\in_j = \frac{dQ_j}{dP_j} \cdot \frac{P_j}{Q_j} = [\frac{2}{5}] = -0{,}80$

b. Elastisitas silang beras dan jagung adalah:

$$\in_j = \frac{dQ_b}{dP_j} \cdot \frac{P_j}{Q_b} = 2\,[\frac{2}{4}] = 1 \text{ atau } \in_b = \frac{dQ_j}{dP_b} \cdot \frac{P_b}{Q_j} = 2\,[\frac{3}{5}] = 1{,}2$$

Beras dan jagung bersifat tidak elastis $|\in_j|$ dan $|\in_j| < 1$

Hubungan beras dan jagung bersifat substitusi (elastisitas silang permintaannya positif).

Contoh 27. Hitunglah persentase perubahan dalam permintaan jagung yang diakibatkan oleh kenaikan 15% dalam harga beras.

Diketahui elastisitas jagung terhadap beras:

$$\in_{jb} = \frac{dQ_j}{dP_b} \cdot \frac{P_b}{Q_j} = 1{,}2$$

Dengan menyusun kembali variabel-variabelnya dan dengan substitusi parameter-parameter yang diketahui diperoleh

$$\frac{dQ_j}{Q_j} = \frac{dP_b}{P_b} = 1{,}2(15\%) = 18\%$$

Jadi, persentase perubahan permintaan jagung (dQ/Qj) adalah 18 persen.

8.5.2.2 Elastisitas Silang dari Penawaran

Untuk mendapatkan ukuran kuantitatif respon produsen (seperti juga dalam elastisitas silang permintaan) kita kenal juga ukuran elastisitas silang penawaran yang menyatakan sebagai perbandingan antara persentase perubahan jumlah barang A yang ditawarkan dengan persentase perubahan harga barang B.

$$\in = \frac{\%\ \text{perubahan jumlah barang A yang ditawarkan}}{\%\ \text{perubahan harga barang B}}$$

$$\in_{ab} = \frac{dQ_a}{dP_b} \cdot \frac{P_b}{Q_a} \qquad 8-25$$

eab = (+): Barang A dan barang B merupakan barang yang dihasilkan bersama (joint products). Artinya jika terjadi kenaikan jumlah penawaran barang B juga dibarengi dengan kenaikan harga barang A. Contoh barang tersebut misalnya beras dengan katul yang dihasilkan bersama dalam proses penggilingan padi.

eab = (-): Barang A dan barang B merupakan barang bebas bersaing (substitusi/competitive products). Suatu penurunan, harga beras mengakibatkan produsen/petani mengganti tanaman padinya dengan jagung yang relatif menguntungkan. Juga kacang tanah dengan kedelai.

Penurunan harga kacang mendorong petani mengganti tanaman kacangnya dengan kedelai yang lebih menguntungkan.

Eab = nol: Keadaan ekstrim terjadi bila hanya ada satu jenis tanaman yang dihasilkan pada tanah pertanian. Kenyataan ini seringkali secara salah dianggap sebagai respon penawaran yang terlalu kecil, lebih-lebih pada petani subsisten atau yang terisolasi. Ketiadaan tanaman alternatif ini memegang peranan yang sangat penting.

Contoh 28. Fungsi penawaran dua macam barang (A dan B) masing-masing ditunjukkan oleh $Q_a = 5 + P_a – ½\ P_b$ dan $Q_b = -P_a + 5P_b$. Hitunglah elastisitas penawaran masing-masing barang dan jelaskan bentuk hubungan antara keduanya, jika harga masing-masing adalah $P_a = 5$ dan $P_b = 2$.

Pada $P_a = 5$, $\quad Q_a = 5 + P_a – ½\ P_b = 5 + 5 – 1 = 9$

Pada $P_b = 2$ $\quad Q_b = -P_a + 5P_b = -5 + 5(2) = 5$

$Q_s = 5 + P_a – ½\ P_b$ $\qquad$ $Q_s = -P_a + 5P_b$

$dQ_a/dP_a = 1$ $\qquad$ $dQ_b/dP_b = 5$

$dQ_a/dP_b = -\ ½$ $\qquad$ $dQ_b/dP_a = -1$

Elastisitas barang A: $\in_a = \frac{dQ_a}{dP_a} \cdot \frac{P_a}{Q_a} = 1\,(\frac{5}{9}) = 0{,}56$

Elastisitas barang B: $\in_b = \frac{dQ_b}{dP_b} \cdot \frac{P_b}{Q_b} = 5\,(\frac{2}{5}) = 2$

Elastisitas silang penawaran:

$\in_{ab} = \frac{dQ_a}{dP_b} \cdot \frac{P_b}{Q_a} = -\frac{1}{2}\,(\frac{2}{9}) = 0{,}11$ atau $\in_{ba} = \frac{dQ_b}{dP_a} \cdot \frac{P_a}{Q_b} = -1\,(\frac{5}{5}) = -1$

- Barang A bersifat tidak elastis $|\in_a| < 1$
- Barang B bersifat elastis $|\in_a| > 1$
- Hubungan barang A dan B bersifat substitusi (elastisitas silang penawarannya negatif).

Contoh 29, Kerjakan seperti contoh 28. Fungsi penawaran barang A dan barang B masing-masing dicerminkan oleh $Q_x = P_a = P_b$ dan $Q_b = 3P_a + 2P_b$ (pada $P_a = 2$ dan $P_b = 4$).

Pada $P_a = 2$, $\qquad$ $Q_a = P_a + P_b = 2 + 4 = 6$

Pada $P_b = 4$, $Q_b = 3P_a + 2P_b = 3(2) + 2(4) = 14$

$dQ_a/dP_a = 1$ $dQ_b/dP_b = 2$

$dQ_a/dP_b = 1$ $dQ_b/dP_a = 3$

Elastisitas barang A: $\in_a = \frac{dQ_a}{dP_a} \cdot \frac{P_a}{Q_a} = 1\left(\frac{2}{6}\right) = 0{,}33$

Elastisitas barang B: $\in_b = \frac{dQ_b}{dP_b} \cdot \frac{P_b}{Q_b} = 2\left(\frac{2}{6}\right) = 0{,}57$

$\in_{ab} = \frac{dQ_a}{dP_b} \cdot \frac{P_b}{Q_a} = 1\left(\frac{4}{6}\right) = 0{,}67$ atau $\in_{ba} = \frac{dQ_b}{dP_a} \cdot \frac{P_a}{Q_b} = 3\left(\frac{2}{14}\right) = 0{,}43$

- Barang A bersifat tidak elastis $|\in_a| < 1$
- Barang B bersifat elastis $|\in_b| < 1$
- Hubungan barang A dan B bersifat *joint products* (elastisitas silang penawarannya positif).

8.5.3 Elastisitas Pendapatan

Elastisitas pendapatan (*income elasticity of demand*) mengukur tingkat perubahan permintaan atas suatu barang akibat dari perubahan pendapatan konsumen, dengan pengertian bahwa pendapatan merupakan satu-satunya faktor pengubah dan faktor-faktor lainnya tetap tidak mengalami perubahan (*ceteris paribus*).

$$\in_y = \frac{\%\ \text{perubahan jumlah barang yang diminta}}{\%\ \text{perubahan pendapatan}}$$

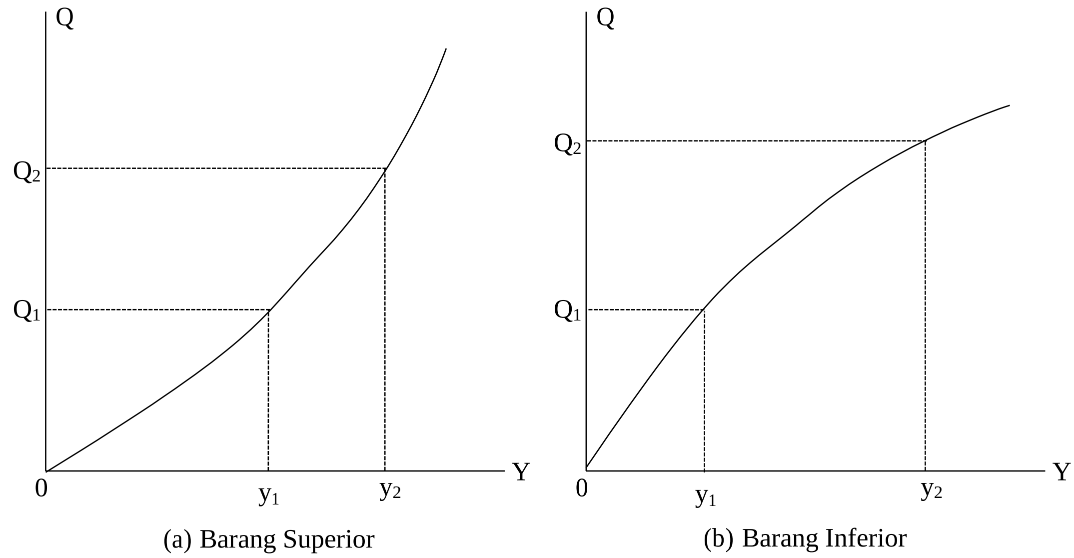
$$\in_y = \frac{dQ_X}{dY} \cdot \frac{Y}{Q} \qquad 8-26$$

di mana Qx adalah jumlah barang X yang dibeli dan Y adalah pendapatan. Apabila permintaan atas suatu barang bertambah dengan bertambahkan pendapatan, maka barang itu disebut superior goods atau normal; elastisitas pendapatannya bertanda positif. Barang superior misalnya barang-barang lux (impor) seperti kulkas, piano, perangkat komputer, laser disk, mobil dan lain-lain (Gambar 8.8a).

Bila permintaan suatu barang berkurang dengan bertambahkan pendapatan, maka barang itu disebut inferior goods, elastisitas pendapatannya bertanda negatif. Barang inferior misal yang berkaitan dengan kebutuhan sehari-hari yaitu perumahan, pakaian, pangan dan lain-lain (Gambar 8.8b).

Dari beberapa penelitian diketahui dengan bertambahnya pendapatan, penduduk miskin yang tadinya mengkonsumsi gaplek akan mengurangi permintaan gaplek karena konsumsi orang-orang itu bergeser ke beras. Gaplek ini memang merupakan makanan yang lebih inferior dibandingkan dengan beras. Dengan demikian jika harga gaplek turun, maka konsumen akan merasa menjadi lebih kaya dan akan memilih mengkonsumsi beras. Akibatnya permintaan akan gaplek justru semakin turun dengan adanya penurunan harga.

Inilah yang sering disebut Giffen paradox dimana bentuk kurva permintaannya tidak mengikuti pola kurva permintaan atas barang-barang normal.



Gambar 8.8

Contoh 30. Tingkat pendapatan masyarakat suatu daerah pada suatu waktu sebesar Rp. 150 juta dan jumlah permintaan akan barang A sebanyak 75 ribu unit. Pada saat berikutnya pendapatan meningkat menjadi Rp. 175 juta dengan permintaan barang A sebanyak 70 ribu unit. Tentukan elastisitas pendapatan terhadap permintaan barang A dan bagaimana barang A tersebut barang *superior goods* atau *inferior goods* ?

Diketahui: Y1 = Rp. 150 juta dan Y1 ; = Rp. 175 juta

Q_1 = 75 ribu unit dan Q_2 = 70 ribu unit

Elastisitas pendapatan:

$$\in_b = \frac{\Delta Q}{\Delta Y} \cdot \frac{\frac{1}{2}(Y_1 + Y_2)}{\frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)} = \frac{(70.000 - 75.000)}{(1175 - 150)x10^6} \cdot \frac{\frac{1}{2}(175 + 150)x10^6}{\frac{1}{2}(75.000 + 70.000)}$$

$= -0{,}448$

Karena $\in y$, < 0 maka barang A termasuk *inferior goods.*

Contoh 31. Hubungan fungsional pendapatan Y dengan jumlah barang Q yang diminta adalah Y = Q + Q – 2. Hitunglah elastisitas pendapatan terhadap permintaan barang pada tingkat pendapatan Y = 10.

Diketahui: Pendapatan $Y = Q^3 + Q - 2 \rightarrow \frac{dY}{dQ} = 2Q + 1$

a. Pada Y = 10 $\quad 10 = Q^2 + Q - 2$

$Q2 + Q - 12 = 0$

$(Q - 3)(Q + 4) = 0$

Q1 = 3 dan Q2 = -4 (tidak dipakai)

Pada Q = 3, → dY/dQ = 2(3) + 1 = 7 sehingga elastisitas pendapatannya.

$$\in_y = \frac{1}{dY/dQ} \cdot \frac{Y}{Q} = (1/7).(10/3) = 0{,}476$$

b. Karena $\in y > 0$ maka barang tersebut termasuk *superior goods*.

8.5.4 Elastisitas Produksi

Untuk menjelaskan elastisitas produksi maka dari sejumlah faktor-faktor produksi, salah satu faktor produksi dianggap sebagai variabel yang berubah-ubah dan faktor produksi lainnya dianggap tetap. Dengan demikian tafsiran elastisitas produksi adalah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya pengaruh perubahan jumlah output yang dihasilkan akibat adanya perubahan jumlah input yang digunakan yaitu,

$$\in_y = \frac{\%\ \text{perubahan jumlah ouput}}{\%\ \text{perubahan input}}$$

$$\in_y = \frac{dP\ Q}{dQ\ P} \cdot \frac{Q}{P} \qquad 8 - 27$$

di mana dP/dQ tidak lain adalah Marginal Physical Product (MPP).

Contoh 32. Suatu fungsi produksi ditunjukkan oleh persamaan P = 10Q – Q^2 di mana (P output produksi dan Q input produksi). Hitunglah elastisitas produksi pada tingkat penggunaan input Q = 2 dan Q = 4 unit.

Diketahui: fungsi produksi P = 10Q – Q2 dan dP/dQ = 10 – 2Q

a. Pada Q = 2 → P = 10(2) – (2) = 16 dan dP/dQ – 10 – 2(2) = 6

$$\epsilon_p = \frac{dP}{dQ} \cdot \frac{Q}{P} = 6.(2/16) = 0{,}75$$

b. Pada Q = 4 → + P = 10(4) – (4) = 24 dan dP/dQ = 10 – 2(4) = 2

$$\epsilon_p = \frac{dP}{dQ} \cdot \frac{Q}{P} = 2.(4/24) = 0{,}33$$

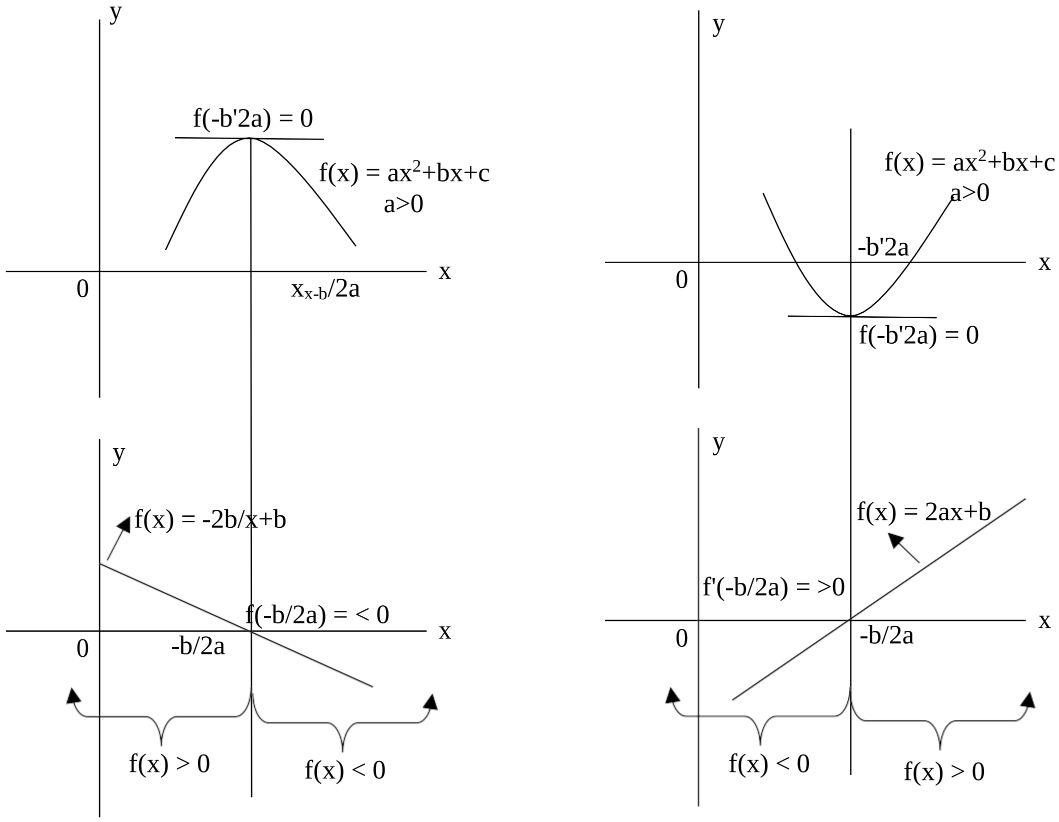
8.6 MAKSIMISASI DAN MINIMISASI

Masalah maksimisasi dan minimisasi ini akan dikatakan sebagai masalah optimisasi (*optimization problems*) yang biasanya ditemukan pada saat misalnya: menentukan kombinasi yang optimum dari barang-barang/jasa-jasa yang dihasilkan atau akan dijual oleh perusahaan; menentukan campuran bahan-bahan yang terbaik akan tetapi dapat menekan biaya yang sekecil-kecilnya; memilih schedule yang efisien dan lain-lain.

Untuk mencapai suatu maksimum atau minimum relatif suatu fungsi harus berada pada suatu dataran yaitu tidak menaik atau menurun pada titik tersebut. Turunan suatu fungsi pada titik datar tersebut pasti nol.

Syarat pertama untuk mencari nilai-nilai optimum (maksimum atau minimum) dari suatu fungsi bebas y = f(x) dibutuhkan syarat yang diperlukan (*necessary condition*) yaitu turunan pertama harus sama dengan nol. Syarat kedua, syarat yang mencukupi (*sufficient condition*) yaitu bahwa turunan yang kedua adalah negatif untuk maksimum relatif dan positif untuk minimum relatif.

Taksiran secara geometris fungsi kuadrat y = f(x) = ax^2 + bx + c mempunyai turunan pertama yaitu f''(x) = 2ax + b dan turunan keduanya adalah f(x) = 2a. Kurva fungsi kuadrat dan turunannya dapat dilihat pada Gambar 8.9.



Gambar 8.9

Untuk a > 0: Kurva f'(x) berupa fungsi linear yang memotong sumbu-X di titik stasioner x = -b/2a. Karena f'(-b/2a) < 0 maka kurva fungsi f(x) bersifat turun disekitar titik stationer x = -b/2a. Akan tetapi f' (-b/2a) = 0, sehingga pada sebelah kiri titik stationer diperoleh f'(x) < 0. Dengan demikian menurut uji turunan pertama fungsi f(x) mencapai maksimum lokal pada titik stationer x = -b/2a.

Untuk a < 0: Kuva f'(x) berupa fungsi linear yang memotong sumbu-X di titik stationer x = -b/2a. Karena f''(-b/2a) > 0 maka kurva fungsi f'(x) bersifat naik di sekitar titik stationer x = -b/2a. Akan tetapi f'(-b/2a) = 0, sehingga pada sebelah kiri titik stationer diperoleh f'(x) < 0 dan disebelah kanannya diperoleh f'(x) > 0. Dengan demikian menurut uji turunan pertama fungsi f(x) mencapai minimum lokal pada titik stationer x =-b/2a.

Untuk suatu masksimum relatif: $\frac{dy}{dx} = 0$: $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

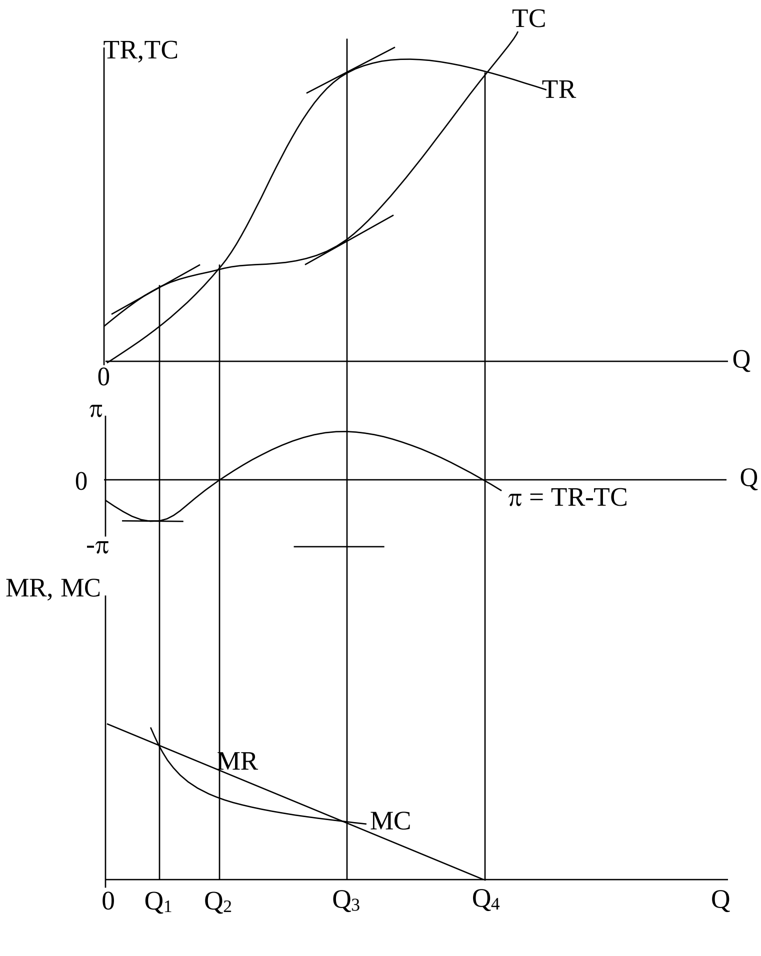
Untuk suatu minimum relatif: $\frac{dy}{dx} = 0$: $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ 8 – 28

Adanya hubungan yang erat antara turunan pertama dan turunan kedua seperti di bawah, menyebabkan syarat agar terpenuhi nilai maksimum atau minimum relatif lebih besar. Di dalam dunia usaha (produksi) yang sedang dijalankan, dikenal suatu prinsip yaitu ingin mendapatkan keuntungan yang paling besar. Tingkat produksi yang menghasilkan keuntungan maksimum dapat didekati dengan pendekatan kalkulus diferensial.

Seperti yang telah dibahas pada bab terdahulu, fungsi keuntungan dapat dihitung dari hubungan berikut:

π = TR – TC = f(Q)

Keuntungan terbesar (maksimum) ini dapat dijangkau apabila diferensial (turunan pertama) fungsi pendapatan total (MR) sama dengan turunan pertama fungsi biaya total (MC). Dengan demikian, syarat keharusan agar keuntungan perusahaan maksimum adalah $\frac{d\pi}{dQ} = 0$



Gambar 8.10 Fungsi Keuntungan π = f(Q)

Secara geomeris kesamaan MR = MC ditunjukkan perpotongan kurva MR dan kurva MC. (Gambar 9-10). Akan tetapi, syarat keharusan MR = MC atau $d\pi/dQ = 0$ belumlah cukup untuk mengkondisikan apakah keuntungan akan maksimum ataukah sebaliknya kerugian maksimum. Ini berarti perlunya syarat kedua, syarat mencukupi yaitu bahwa turunan yang kedua adalah negatif untuk maksimum relatif dan positif untuk minimum relatif.

Dengan demikian, syarat batas agar perusahaan memperoleh keuntungan maksimum adalah:

$d\pi/dQ = \pi'(Q) = 0$ atau MR = MC (syarat keharusan)

$d^2\pi/dQ^2 = \pi''(Q) < 0$ (syarat mencukupi) 8-29

Contoh 33. Diketahui fugsi permintaan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan P = 110 – 5Q dan biaya total produksi TC = $5Q^2 + 10Q + 100$ dimana (P harga per unit dan Q jumlah barang).

a. Carilah PQ dan pendapatan (TR) tersebut jika diharapkan pendapatan (TR) maksimum.
b. Carilah P.Q dan pendapatan (TR) terbesar jika produsen mengharapkan keuntungan/profit tidak lebih dari 140

a. Pendapatan, TR = (110 – 5Q)Q = $110Q - 5Q^2$

TR maksimum, jika $dTR/dQ = 110 - 10Q = 0 \rightarrow Q = 11$ unit

Dengan mensubstitusikan Q pada fungsi permintaan maka:

P = 110 – 5(11) = 55

Pengujian syarat turunan kedua, $d^2R/dQ^2 - 10 < 0$. Karena itu pada jumlah produksi Q = 11 unit, pendapatan (TR) akan maksimum yaitu,

TR = 110(11) – 5(11)2 = 605

b. Produsen mengharapkan laba paling tidak $\pi = 140$ sehingga

140 = TR – TC

$140 = (110Q-5Q^2) - (5Q^2 + 10Q + 100)$

$100 - 100Q + 240 - 0$ atau $Q^2 - 10 + 24 = 0$

(Q – 4)(Q – 6) = 0

Q – 4 dan $Q^2 = 6$

Pada Q = 4 unit, P = 110 – 5(4) = 110 – 20 = 90

$TR = 110(4) - 5(4)^2 = 440 - 80 = 360$

Pada Q = 6 unit, P = 110 – 5(6) = 110 – 30 = 80

$TR = 110(6) - 5(6)^2 = 660 - 180 = 480$

Jadi, pendapatan total TR terbesar pada Q = 6 unit.

Contoh 34. Pendapatan rata-rata dicerminkan oleh persamaan $AR = (-1/3Q^2 + 7Q - 18 - 1/Q)$ dan biaya total $TC = Q^2 + 2Q - 1$. Carilah laba maksimum.

Pendapatan total, $TR = AR.Q = (-1/3Q^2 + 7Q - 18 - 1/Q)Q$

$= -1/3Q^3 + 7Q^2 - 18Q - 1$

Laba $\pi = TR - TC$

$= (-1/3Q^3 + 7Q^2 - 18Q - 1) - (Q^2 + 2Q - 1)$

$= (-1/3Q^3 + 6Q^2 - 20Q$

Laba akan maksimum jika $d\pi/dQ = -Q^2 + 12Q - 20 = 0$

$(Q - 2)(10 - Q) = 0$

Q1 = 2 dan Q2 = 10

Pengajian syarat turunan kedua, $d^2\pi/dQ^2 = -2Q + 12$

Pada Q = 2 unit, $d^2\pi/dQ^2 = -2(2) + 12 = 8 > 0$

Pada Q = 10 unit, $d^2\pi/dQ^2 = -2(10) + 12 = -8 < 0$

Untuk Q = 10 unit memenuhi persyaratan turunan kedua yang disyaratkan suatu maksimum relatif. Sedangkan Q = 2 unit ditolak.

Jadi, laba akan maksimum yaitu sebesar x = -1/3(10)3 + 6(10)2 – 20(10) = 66,67

Contoh 35. Fungsi permintaan suatu perusahaan P = 300 – Q dan biaya rata-rata yang dikeluarkan ditunjukkan oleh fungsi AC = Q – 200 + 20.000/Q. Carilah tingkat output yang (a) Memaksimumkan pendapatan total, (b) Meminimumkan biaya dan (c) Memaksimumkan keuntungan.

a. Pendapatan total, $TR = PQ = (300 - Q)Q = 300Q - Q^2$

   Pendapatan TR maksimum jika, $d^2TR/dQ = 300 - 2Q = 0 \rightarrow Q = 150$ unit

   Pengujian syarat turunan kedua, $d^2TR/dQ^2 = -2 < 0$. Karena itu pada Q = 150 unit pendapatan akan maksimum, TR = 300(150) – (150) = 22.500

b. Biaya total, TC = AC.Q = (Q – 200 + 20.000/Q)Q

= Q2 – 2000 + 20.000

Biaya TC minimum jika, dTC/dQ = 20 – 200 – 0 – Q = 100 unit

Pengujian syarat turunan kedua, d^3 TC/dQ^2 = 2 > 0. Karena itu pada tingkat produksi Q = 100 unit biaya yang dikeluarkan akan minimum yaitu TC = $(100)^2$ – 200 (100) + 20.000 = 10.000.

c. Fungsi laba π = TR – TC = $(300Q – Q^2) – (Q^2 – 200Q + 20.000) = -2Q^2 + 500Q –$ 20.000.

Laba maksimum jika, $d\pi/dQ = -4Q + 500 = 0 \rightarrow Q = 125$ unit

Pengujian syarat turunan kedua, $d^2\pi/dQ^2 = -4 < 0$. Karena itu perusahaan dengan tingkat produksi Q = 125 unit laba yang diperoleh akan maksimum yaitu, $\pi = – 2 (125)^2 + 500(125) – 20.000 = 11.250$.

Contoh 36. Seorang produsen mempunyai kemungkinan untuk melakukan diskriminasi antara pasar dalam negeri dan pasar luar negeri suatu produk dimana permintaan masing-masing produk adalah $Q_1 = 85 – P_1$ dan $Q_2 = 65 – P_2$. Sedangkan biaya totalnya adalah TC = 15Q + 300, dimana $Q = Q_1 + Q_2$.

a. Berapa harga yang akan dikenakan produsen untuk memaksimumkan laba dengan melakukan diskriminasi di antara pasar.
b. Tanpa melakukan diskriminasi dan
c. Bandingkan laba yang diperoleh antara (a) dan (b).

a. Pada pasar diskriminasi, produsen akan menetapkan harga sedemikian rupa sehingga MR = MC pada masing-masing pasar. Dengan demikian $MC = MR_1 = MR_2$. Jadi,

MC = (dTC/dQ) = 15 akan selalu sama pada semua tingkat output Fungsi permintaan pada pasar dalam negeri:

$P_1 = 85 – Q_1 \rightarrow TR_1 = (85 – Q_1)Q_1 = 85Q_1 – Q_1^2$

$\rightarrow MR_1 = (dTR_1/dQ_1) = 85 – 2Q_1$

Pada $MC = MR_1 \rightarrow 15 = 85 – 2Q_1$ diperoleh: $Q_1 = 35$ unit

Untuk $Q_1 = 35$ unit, $P_1 = 85 – 35 = 50$

Fungsi permintaan pada pasar luar negeri:

$P_2 = 65 – Q_2 \rightarrow TR_2 = (65 – Q_2)Q_2 = 65Q_1 = Q_2^2$

$\rightarrow MR_2 = (dTR_1/dQ_2) = 65 – 2Q_2$

Pada $MC = MR_2 \rightarrow 15 = 65 – 2Q_2$ diperoleh: $Q_2 = 25$ unit

Untuk $Q_2 = 25$ unit, $P_2 = 65 – 25 = 40$

Produsen yang melakukan diskriminasi akan mengenakan harga yang lebih rendah di pasar luar negeri dimana permintaannya relatif lebih elastis ($\in$ = 1,6) dibandingkan dengan permintaan dipasar dalam negeri dimana elasisitas permintaannya lebih kecil ($\in$ =1,43).

b. Jika produsen tidak melakukan diskriminasi maka harga di pasar dalam negeri sama dengan harga di luar negeri $P_1 = P_2$ sehingga:

$Q = Q_1 + Q_2 = (85 – P_1) + (65 – P_2)$

$= 150 – 2P$ atau $P = 75 – 0.5Q$

$TR = (75 – 0,5Q)\ Q = 750 – 0.5Q_2$

$MR = (dTR/dQ) = 75 – Q$

MR = MC, 75 – Q = 15, diperoleh Q = 60 unit

Untuk Q = 60 unit, maka P = 75 – 0,5(60) = 45

Dari data-data tersebut dapat disimpulkan bahwa jika tidak ada diskriminasi harga relatif lebih rendah dari harga pasar dalam negeri dan relatif lebih tinggi dari harga pasar luar negeri. Akan tetapi, dapat diperhatikan bahwa kuantitas barang yang dijual tetap sama yaitu $Q_1 = 35$, $Q_2 = 25$ dan Q = 60.

c. Dengan Diskriminasi Harga

$TR = TR_1 + TR_2 = P_1Q_1 + P_2Q_2$	$TC = 15Q + 300$
$= 50(35) + 40(25)$	$= 15(Q_1 + Q_2) + 300$
$= 2.750$	$= 15(35 + 25) + 300$
	$= 1.200$

Laba π = TR – TC = 2.750 – 1.200 = 1.550

Tanpa Diskriminasi Harga

TR = P.Q = 45(60) = 2.700 dan TC = 1.200

Laba π = TR – TC = 2.700 – 1.200 = 1.500

Jadi, adanya diskriminasi harga keuntungan perusahaan lebih besar dibanding dengan tanpa melakukan diskriminasi harga.

Contoh 37. Fungsi produksi yang dihadapi produsen ditunjukkan oleh persamaan P = $225Q_2 – Q_2$, dimana P adalah jumlah produk yang dihasilkan dan Q jumlah input yang dibutuhkan. Ditanyakan :

a. Berapa input Q yang digunakan agar produk total P mencapai maksimum.
b. Berapa produk total dan produk rata-rata jika digunakan input sebanyak 100 unit.
c. Berapa produk marginal jika input ditambah 1 unit.
d. Berapakah input Q agar produk rata-rata mencapai maksimum dan tunjukkan bahwa besar produk rata-rata maksimum satta dengan produk marginalnya.

Diberikan fungsi produksi $P = 225Q^2 – Q^2$

a. Memaksimumkan produk total P, $dP/Q = 450Q – 3Q^2 = 0$

$Q(450 – 30) = 0 \rightarrow Q = 150$

Pengujian syarat turunan kedua, $d^2P/dQ^2 = -6 < 0$. Produk p mencapai maksimum pada input Q = 150 unit.

P = 225(150) – (150) = 1.687.500 unit.

b. Pada input Q 100 unit, $P = 225(100)^2 – (100)$

$= 1.250.000$ unit

$$\text{Produk rata} - \text{rata APP} = \frac{1.250.000}{100}$$

c. Input Q = 100 unit, P_1 = 1.250.000 unit

Input Q = 101 unit, P_2 = 1.264.000 unit

$$\text{Produk marginal MPP} = \frac{P_2 - P_1}{Q_2 - Q_1} = \frac{(1.264.924 - 1.250.000\ )}{101 - 100}$$

= 14.924 unit

d. Produk rata-rata, $APP = P/Q = (225Q^2 – Q^3)/Q = 225Q – Q^2$

Agar produk rata-rata maksimum, maka haruslah $(APP)^1 = 0$. Jadi, $(APP)^1 = d(APP)/dQ = 225 – 2Q = 0 \rightarrow Q = 225/2 = 112,5$ unit.

Pada Q = 112,5 unit, $APP = 225(112,5) – (112,5)^2$

= 2.5312,25 – 12.656,25 = 12.656.25

$MPP = 4500 – 3Q^2 = 450(112,5) – 3(112,5)^2$

= 50.625 – 37.965,75 = 12.656,25

Cocok!

Contoh 38. Fungsi permintaan suatu barang adalah P = 14 – Q dan fungsi penawarannya P = 2 + 2Q. Terhadap barang ini dikenakan pajak tambahan sebesar t per unit. Hitunglah besarnya pajak tersebut agar hasil penerimaan pajak bagi pemerintah menjadi maksimum.

a. Permintaan: P = 14 – Q

   Penawaran : P = (2 + 2Q) + t (setelah dikenakan pajak)

   Titik keseimbangan pasar setelah dikenakan pajak dicapai pada,

   (14 – Q) = (2 + 2Q) + t

   Q = 1/3(12t) = (4 – 1/3)

   Jadi, fungsi pajak total yaitu: T = tQ = t(4 – 1/3) = 4t – t^2/3.

b. Memaksimumkan pajak T. dT/dt = 4 – $\frac{2t}{3}$ = 0 → t^2/3.

   Pada t = 6. → Q = 4 – 1/3(6) = 2 unit

   → P = 14 – 1 = 12

   Pengujian syarat turunan kedua, d^2T/dt^2 = -2/3 < 0. Karena itu pajak total akan maksimum pada Q = 2 unit dan t = 6 per unit. Pajak total yang diterima pemerintah sebesar, T = tQ = 6(2) = 12

c. Memaksimumkan pajak T, dapat juga dihitung dari pajak sebagai fungsi dari kuantitasnya. Pada tingkat keseimbangan diperoleh:

   t = 12 – 3Q → T = tQ (12 – 30) 12Q – $3Q^2$

   Memaksimumkan pajak T. dT/dQ = 12 – 600 diperoleh Q = 2.

   Pada Q = 2 unit, t = 12 – 3(2) 12 – 6 = 6 per unit

   Pengujian syarat turunan kedua, d^{2}'T/dQ^2 = -6 <0. Karena itu pajak total akan maksimum pada Q = 2 unit dan t = 6 per unit. Pajak total yang diterima pemerintah sebesar, T = Q = 6(2) = 12.

   cocok!

Contoh 39. Fungsi permintaan suatu barang adalah P = 10 – 20 dan biaya rata-rata ditunjukkan oleh AC = 2 + Q. Tentukan:

a. Besarnya laba maksimum.

b. Penerimaan pemerintah dari pajak sebagai fungsi 1 dan hitung besarnya pajak total tersebut.

   Pendapatan TR = (10 – 20)Q = 10Q – $2Q^2$

   Biaya total setelah pajak TC = (AC + t) Q = 2Q + Q^2 + Tq

a. Laba π = TR – TC = $(100 - 2Q^2) - (2Q + Q^2 + tQ)$

$= -30^2 + 8Q - 1Q$

Laba maksimum jika, $d\pi/dQ = 8 - 6Q - t = 0 \rightarrow Q = (8 - 0)/6$

Pengujian syarat turunan kedua, $d^3\pi/dQ^2 = -6 < 0$. Karena itu laba akan maksimum pada nilai $Q = (8 - t)/6$ unit

b. Penerimaan pajak total pemerintah sebagai fungsi t:

Pajak total $T = tQ = \frac{1}{6}(8t - t^2)$

Memaksimumkan pajak T. $dT/dt = (8 - 2t)/6 = 0 \rightarrow t = 4$

Pengujian syarat turunan kedua, $d^2T/dt^2 - 1/3 < 0$. Karena itu pajak yang diterima akan maksimum pada nilai t = 4 per unit.

c. Pajak total yang diterima pemerintah;

Pada t = 4 per unit, $Q = (8 - 4)/6 - 2/3$ unit

Jadi, $T = tQ = 4(2/3) = 2{,}67$

Contoh 40. Seorang pengusaha yang mempunyai hak monopoli atas produksinya, mempunyai fungsi pendapatan total dan fungsi biaya total produksi seperti berikut:

$TR = -aQ^2 + bQ \quad (a,b > 0)$

$TC = \alpha Q^2 + \beta Q + k \quad (\alpha.\beta.k > 0)$

Jika pemerintah akan mengenakan pajak sebesar t per unit untuk setiap produksi Q yang dihasilkan, carilah:

a. Berapakah Q jika diharapkan laba perusahaan mencapai maksimum.
b. Berapakah t agar memberikan penghasilan pajak yang maksimum bagi pemerintah.

Beban pajak akan mengubah fungsi biaya yaitu biaya totalnya bertambah sebesar beban pajak itu sendiri yaitu sebesar tQ. Jadi,

a. $TR = -aQ^2 + bQ$ (tetap)

$TC = \alpha Q^2 + \beta Q + k + tQ$

$= \alpha Q^2 + Q(\beta + t) + k$ (sesudah pajak)

Fungsi laba, $\pi = TR - TC = (-aQ^2 + bQ) - [(\alpha Q^2 + Q\beta + 1) + k)]$

$= -(a + \alpha)Q^2 + Q(b - \beta - t) - k$

Laba π akan maksimum, jika $d\pi/dQ = 0$ dan $d^2\pi/d^2Q < 0$. Jadi,

$d\pi/dQ = -2(a + \alpha) Q + (b - \beta - t) = 0$

$$2(a + \alpha) Q = (b - \beta - t) + Q = \frac{(b - \beta - t)}{2(a + 2)}$$

Untuk maksimum, haruslah memenuhi syarat uji turunan keduanya yaitu $d^2\pi/d^2Q = - 2(a + \alpha)$

b. Agar supaya T maksimum haruslah $dT/dt = 0$ dan $d^2T/d^2t < 0$

$$T = t.Q = t.x \{\frac{(b - \beta - t)}{2(a + 2)}\} = \frac{(bt - \beta t - t^2)}{2(a + \alpha)}$$

$$dT/dt = \frac{(b - \beta - 2t)}{2(a + \alpha)} = \frac{(bt - \beta t - t^2)}{2(a + \alpha)}$$

Untuk T mencapai maksimum, haruslah memenuhi syarat uji turunan keduanya yaitu:

$$\frac{D^2T}{dt^2} = \frac{-2}{2(a + \alpha)} = \frac{-1}{(a + \alpha)} < 0$$

Dengan demikian $t = (b - \beta)/2$ akan mampu memberikan penghasilan pajak yang maksimum bagi pemerintah.

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Tentukan laju perubahan rata-rata fungsi di bawah ini pada daerah yang diberikan:
   a. $y = f(x) = x^2 + 5x – 1$ $\quad -3 \le x \le 1$
   b. $y = f(x) = 4 – x^2$ $\quad -3 \le x \le 4$
   c. $y = f(x) = x^2 – 1$ $\quad 0 \le x \le 2$
   d. $y = f(x) = x^3$ $\quad -1 \le x \le 1$
   e. $y = f(x) = 2x^2$ $\quad 1 \le x \le 3$
   f. $y = f(x) = 4x^2 + 2x$ $\quad -1 \le x \le 0$
2. Tentukan turunan fungsi di bawah ini pada titik yang diberikan.
   a. $f(x) = x^4 + 3x^2$ pada $x = 0$ dan $x=3$
   b. $f(x) = 3x – (1\sqrt{x}) + 1$ pada $x = 1$ dan $x = 5$
   c. $f(x) = (x + 1)/\sqrt{x}$ pada $x = ½$ dan $x = 2$
   d. $f(x) = 3/(x + 3)^2$ pada $x = -2$ dan $x = 3$
   e. $f(x) = (2x + 4)/(x - 1)$ pada $x = -2$ dan $x = 6$

3. Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut:

a. $f(x) = 8x^2 (5x – 4)$	b. $f(x) = 3(x^2 – 8)$
c. $f(x) = (x – 2)(x – 1)$	d. $f(x) = \sqrt{} (1 + \sqrt{}x)$
e. $f(x) = 12x/\sqrt{}(x^2 + 2)]$	f. $f(x) = (4x – 4)^2 (x + 4)^3 (x^2 – 1)$
g. $f(x) = x (5x – 6)$	h. $f(x) = 1/(2x^2 – x + 3)4$

4. Tentukan turunan pertama dan turunan kedua dari fungsi berikut:

a. $f(x) = (x^2 + 3)(3 – x^2)$	b. $f(x) = x\sqrt{}(x – 3)$
c. $f(x) = (x – 5)(x + 1)$	d. $f(x) = (2x + 3)/(8x – 3)$
e. $f(x) = (x^2 + 3)6$	f. $f(x) = 2/(x^2 – 1)5$

5. Jika f(x) = (x – x + 1) tentukanlah

a. f'(x)	b. f''(-x)	c. f'(1/x)	d. f'(-1/x)
e. f''(x)	f. f''(-x)	g. f''(1/x)	h. f''(-1/x)
i. f''''(x)	j. f''''(-x)	k. f''''(1/x)	i. f''''(1/x)

6. Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut:
   a. f(x) = alog (12 x -3)
   b. f(x) = alog $(x – 3)^2$
   c. f(x) = alog $(4x – 1)^2$
   d. $f(x) = (4x + 3)/e^{4x+1}$
   e. $f(x) = e^{2x} – 4$
   f. $f(x) = (2x – 1)e^{2x-1}$
7. Fungsi produksi ditunjukkan oleh persamaan $P = 120Q^2 – 2Q^3$ di mana P output produksi dan Q input produksi:
   a. Carilah fungsi produksi marginal dan fungsi produksi rata-rata.
   b. Hitunglah produksi total, produksi marginal dan produksi rata-rata jika digunakan input sebanyak Q = 15 unit.
   c. Berapa total produksi maksimumnya.
8. Jika fungsi biaya suatu perusahaan dicerminkan oleh persamaan $TC = 0.5Q^2 – 50Q + 10$. (a) Carilah fungsi biaya marginal dan (b) Fungsi biaya rata-ratanya pada Q = 49 unit dan Q = 50 unit.
9. Carilah fungsi biaya marginal untuk setiap fungsi biaya rata-rata berikut: (a) AC = Q2 – 2Q + 50 + 10/Q dan (b) AC = 2Q + 8 + 2/Q.

10. Fungsi permintaan barang ditunjukkan oleh persamaan $Q = 100 - P^2$. Hitung elastisitas permintaan pada tingkat harga P = 10 dan P = 11 unit.
11. Tentukan tingkat harga dari fungsi permintaan Q = 16 – 2P di mana nilai absolut dari elastisitas akan sama dengan atau lebih besar dari satu $|\in| \geq 1$.
12. Fungsi penawaran suatu barang dicerminkan oleh persamaan Q = P – 20 Hitunglah elastisitas penawarannya pada tingkat harga P – 20, P = 30 dan P = 40.
13. Fungsi permintaan beras ditunjukkan oleh persamaan $Q_b = 6 - P_b + P_j$ dan jagung $Q_j = 4 + P_b - P_j$ dimana Q_b, Q_j jumlah permintaan beras dan jagung dan P_b, P_j harga masing-masing beras dan jagung. Hitunglah elastisitas permintaan beras dan jagung dan jelaskan bentuk hubungan antara keduanya jika harga masing-masing $P_b = 3$ dan $P_j = 2$.
14. Seperti pada soal-13, hitunglah persentase perubahan dalam permintaan jagung yang diakibatkan oleh kenaikan 10% dalam harga beras.
15. Tingkat pendapatan masyarakat pada suatu waktu sebesar Rp. 10 juta dan jumlah permintaan barang A sebanyak 80.000 unit. Pada saat berikutnya pendapatan meningkat menjadi Rp. 15 juta dengan permintaan barang A sebanyak 65.000 unit. Tentukan elastisitas pendapatan terhadap permintaan barang. Apakah barang tersebut termasuk superior goods atau inferior goods.
16. Fungsi pendapatan masyarakat Y terhadap jumlah barang Q yang diminta adalah $Y = Q^2 - Q + 60$. Hitunglah elastisitas pendapatan terhadap permintaan barang pada tingkat pendapatan Y = 10.
17. Diketahui fungsi permintaan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan P = 45 – 0,5Q dan biaya total $TC = Q^3 - 39{,}5Q + 120Q + 125$ dimana (P harga per unit dan Q jumlah barang).
    a. Carilah P, Q dan TR jika diharapkan pendapatan maksimum.
    b. Carilah P, Q jika produsen mengharapkan keuntungannya maksimum
18. Fungsi permintaan suatu perusahaan P = 500 – Q dan biaya rata-rata yng dikeluarkan ditunjukkan oleh fungsi AC = Q. Carilah tingkat output yang : (a) Memaksimumkan pendapatan total, (b) Meminimumkan biaya total dan (c) Memaksimumkan keuntungan perusahaan.
19. Fungsi permintaan suatu barang adalah P = 50 – 2Q dan biaya rata-rata ditunjukkan oleh AC = 5 + Q. Tentukan

a. Besarnya laba maksimumkan

b. Penerimaan pemerintah dari pajak sebagai fungsi t dan hitung besarnya pajak total tersebut.

20. Seorang pengusaha mempunyai kemungkinan melakukan diskriminasi antara pasar dalam negeri dan pasar luar negeri suatu produk dimana permintaan masing-masing produk adalah $Q_j = 130 – P_j$ dan $Q_2 = 110 – P_2$. Biaya totalnya adalah TC = 30Q + 600, dimana $Q = Q_1 + Q_2$.

    a. Berapa harga yang akan dikenakan produsen untuk memaksimumkan laba dan melakukan diskriminasi di antara pasar.

    b. Tanpa melakukan diskriminasi.

    c. Membandingkan laba yang diperoleh antara (a) dan (b).

21. Fungsi permintaan suatu barang dicerminkan oleh Q = 20 – P dan fungsi penawarannya P = Q + 1. Terhadap barang ini dikenakan pajak tambahan sebesar t per unit. Hitunglah besarnya pajak tersebut agar hasil permintaan pajak bagi pemerintah menjadi maksimum.

BAB IX
APLIKASI PARTIAL DIFERENSIAL

9.1 TURUNAN PARSIAL

Pada bab sebelumnya telah kita bahas tentang cara mendapatkan nilai ekstrim dari fungsi variabel tunggal y = f(x), yaitu bahwa turunan pertama dari fungsi tersebut harus sama dengan nol f(x) = 0. Demikian juga untuk fungsi multivariabel berlaku pula kriteria seperti di atas akan tetapi karena variabel bebas yang menyertai fungsi tersebut lebih dari satu, maka proses penentuan turunan dari fungsi tersebut akan dilakukan secara terpisah dengan mengasumsikan variabel ter tentu sebagai konstanta atau dikenal dengan turunan parsial (*partial derivative*). Turunan parsial mengukur tingkat perubahan seketika fungsi multivariabel berkenaan dengan salah satu dari variabel bebas, sedangkan variabel-variabel bebas lainnya dianggap konstan.

Suatu fungsi multivariabel u = f(x,y) yang diturunkan parsial berkenaan dengan variabel bebas x dapat ditulis,

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{(x + 4x) - x}$$

Bila perubahan x dianggap kecil sekali, karena fungsi tersebut kontinu, maka Δu dapat diambil limitnya untuk $\Delta u \to o$.

$$\lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{(x + 4x) - x}$$

Turunan parsialnya dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = u_X \text{ atau } \frac{\delta f}{\delta x} = f_X \qquad 9 - 1$$

Di sini dipakai hanya suku-suku yang mengandung x saja yang diperhitungkan, sedangkan suku-suku yang lain dianggap konstan. Demikian juga penurunan parsial fungsi u berkenaan dengan variabel y dapat ditulis dengan notasi seperti di atas yaitu hanya suku-suku yang mengandung y saja yang diperhitungkan, sedangkan suku-suku yang lain (x) dianggap konstan.

Jika suatu fungsi u = f(x,y,z), maka turunan parsial masing-masing variabel yaitu:

1. Turunan parsial berkenaan dengan x : f,(x,y,z) = $\frac{\delta u}{\delta x} = u_x : \frac{\delta f}{\delta x} = f_x$

2. urunan parsial berkenaan dengan x : f,(x,y,z) = $\frac{\delta u}{\delta x}$ = u_y : $\frac{\delta f}{\delta y}$ = f_y

3. urunan parsial berkenaan dengan x : f,(x,y,z) = $\frac{\delta u}{\delta x}$ = u_z : $\frac{\delta f}{\delta z}$ = f_z

Contoh 1. Carilah turunan parsial fungsi u = $7x^2 – 3xy^2 + 2y$.

a. Pendiferensialan berkenaan dengan x:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 14x – 3y^2$$

b. Pendiferensialan berkenaan dengan y:

$$\frac{\delta u}{\delta y} = – 6xy + 2$$

Contoh 2, Turunan parsial fungsi u = $\frac{x^2+xy}{2y-1}$ + $2x^2y$

a. Pendiferensialan berkenaan dengan x:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{2x + y}{2y} + 4xy$$

b. Pendiferensialan berkenaan dengan y (gunakan kaidah pembagian):

$$\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{x(2y - 1) - 2(x^2 + xy)}{(2y - 1)^2} + 2x^2$$

Contoh 3. Carilah turunan parsial fungsi u = ½ $x^2 – 14 + 2xy + 2,5y^2 – 13y + yz + 3z^2 – 23z + 3xz$

a. Pendiferensialan berkenaan dengan x

$$\frac{\delta u}{\delta x} = x + 2y + 3z - 14$$

b. Pendiferensialan berkenaan dengan y

$$\frac{\delta u}{\delta x} = x + 5y + z - 13$$

c. Pendiferensialan berkenaan dengan

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 3x + y + 6z - 23$$

9.2 TURUNAN PARSIAL KEDUA

Suatu fungsi multivariabel ternyata dapat juga didiferensialkan lebih dari satu kali, di mana masing-masing turunan parsialnya masih dimungkinkan untuk diturunkan lagi. Turunan parsial kedua berikutnya bisa bervariasi tergantung dari bentuk hasil turunan parsial pertamanya. Artinya bila suatu turunan parsial masih mengandung beberapa macam variabel bebas, maka turunan berikutnya dapat dipecah-pecah menjadi beberapa turunan parsial pula.

Suatu turunan parsial kedua $\delta^2u/\delta x^2 = u_{xx}$ atau $\delta^2f/\delta x^2 = f_{xx}$ menunjukkan suatu fungsi yang telah didiferensialkan sebanyak dua kali berkenaan terhadap variabel x saja. Jadi, $\delta^2u/\delta x^2 = u_{xx}$ atau $\delta^2f/\delta x^2 = f_{xx}$ tidak lain adalah mengukur tingkat perubahan seketika dari turunan parsial $\frac{\delta u}{\delta x} = u$, atau $\frac{\delta f}{\delta x} = f$, berkenaan dengan x.

Jika diperkaya lagi, turunan parsial pertama $\delta u/\delta x = u_x$ atau $\delta f/\delta x = f_x$, ternyata dapat diturunkan berkenaan dengan variabel-variabel bebas yang lain misalnya y. Konsep inilah yang memberikan wacana tentang apa yang disebut Turunan Parsial Silang (*Cross Partial Derivative*). Dengan demikian turunan parsial silang juga mengukur tingkat perubahan seketika dari turunan parsial pertama terhadap variabel yang lain.

Notasi-notasi yang sering digunakan untuk turunan parsial silang antara lain: $\delta^2u/\delta x\delta y = u_{xy}$ atau $\delta^2f/\delta x\delta y = f_{xy}$, yaitu fungsi multivariabel u = f(x,y) yang diturunkan parsial terhadap x, kemudian hasil turunan parsial pertama didiferensialkan berkenaan dengan variabel y. Atau sebaliknya, $\delta^2u/\delta x\delta y = u_{xt}$, atau $\delta f/\delta x\delta y = f_{xy}$. Jika kedua turunan parsial silang itu berkesinambungan (kontinu) untuk setiap x dan y, maka turunan parsial silang untuk suatu fungsi selalu sama yaitu $\delta^2u/\delta x\delta y = \delta^2u/\delta y\delta x$ (atau f_{xy}, f_{yx}, atau $u_{xy} = u_{yx}$).

Secara skematis, fungsi dengan dua variabel bebas dapat digambarkan di sini yaitu:

$$u = f(x,y) \begin{cases} \dfrac{\delta u}{\delta x} = f_x \begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{\delta u}{\delta x}\right) = \dfrac{\delta^2 u}{\delta x^2} = f_{xx} \\ \dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{\delta u}{\delta x}\right) = \dfrac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = f_{xy} \end{cases} \\ \dfrac{\delta u}{\delta y} = f_y \begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{\delta u}{\delta y}\right) = \dfrac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = f_{yx} \\ \dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{\delta u}{\delta y}\right) = \dfrac{\delta^2 u}{\delta y^2} = f_{yy} \end{cases} \end{cases}$$

turunan parsial silang yang mempunyai nilai sama

Contoh 4, Carilah turunan parsial pertama, kedua maupun parsial-parsial silangnya untuk fungsi $u = x + 8x^2y^2 - xy + y$

a. Pendiferensialan berkenaan dengan x:

$$\frac{\delta u}{\delta y} = 1 + 16xy^2 - y \qquad \frac{\delta u^2}{\delta x^2} = f_y{}^2$$

b. Pendiferensialan berkenaan dengan y :

$$\frac{\delta u}{\delta y} = 16x^2y - x + 1 \qquad \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta x} = 16x^2$$

c. Turunan parsial silang:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = 32xy - 1 \qquad \frac{\delta^1 u}{\delta y \delta x} = 32xy = -1$$

Contoh 5. Carilah seperti contoh-4 untuk fungsi $u = x^2 + 5x + 4xy + 3y^2\ 5y - 2yz + 32^2 - 6z - 3xz$.

a. Pendiferensialan berkenaan dengan x:

$$\frac{\delta u}{\delta y} = 2x + 4y - 3z^2 - 6z \qquad \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 2$$

b. Pendiferensialan berkenaan dengan y :

$$\frac{\delta u}{\delta y} = 16x^2y - x + 1 \qquad \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 6$$

c. Pendiferensialan berkenaan dengan z:

$$\frac{\delta u}{\delta z} = -3x - 2y + 6z - 6 \qquad \frac{\delta^1 u}{\delta z^2} = 6$$

d. Turunan parsial silang:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x\, \partial y} = 4 \text{ dan } \quad \frac{\delta^1 u}{\delta y\, \delta x} = 4$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta z} = -3 \text{ dan } \quad \frac{\delta^2 u}{\delta z\, \delta x} = -3$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta y \delta z} = - \text{ dan } \quad \frac{\delta^2 u}{\delta z\, \delta y} = -2$$

9.3 DIFERENSIAL TOTAL

Aarti fisis diferesial total (*total differensial*) yaitu mengukur tingkat perubahan variabel tidak bebas yang disebabkan oleh perubahan kecil dalam setiap variabel khususnya secara serentak. Misalkan suatu fungsi u = f(x,y,z) maka perubahan variabel x akan diikuti pula oleh perubahan variabel y maupun z. atau x,y dan z berubah bersama-sama.

Jika x berubah sebesar Δx, maka perubahan dalam u akan menjadi (δu/δy). Δ sama halnya bbila ada perubahan sebesar Δy, maka perubahan dalam u menjadi (δu/δy). Demikian juga x menjadi (δu/δz)Δz.

Sebagai suatu pendekatan dapat kita rumuskan, bahwa perubahan dalam fungsi u = f(x,y,z) sebagai akibat perubahan yang besar tejadi x,y dan z adalah:

$$\Delta u = \frac{\delta u}{\delta x} \Delta x + \frac{\delta u}{\delta y} = \Delta y \ \frac{\delta u}{\delta z} \ \Delta z \qquad 9-2$$

Untuk perubahan sangat kecil (mendekati nol) atua diambil limit, maka perubahan dalam fungsi terseut sebagai akibat perubahan yang sangat kecil terjadi dalam x, y, adalah:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} = \frac{\delta u}{\delta x} \Delta x + \frac{\delta u}{\delta y} = \Delta y \ \frac{\delta u}{\delta z} \ \Delta z \text{ menjadi,}$$

$$du = \frac{\delta u}{\delta x} dx + \frac{\delta u}{\delta y} = dy \ \frac{\delta u}{\delta z} \ dz \qquad 9-3$$

Secara umum dapat ditulis sebagai,

$$du = f_x\, dx + f_y dy + f_z\, dz \qquad 9-4$$

Contoh 6. Carilah diferensial total dari fungsi $u = x^2 + yx + y$.

$$\frac{\delta u}{\delta x} u_x = 2x + y$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} u_y = x + 1$$

Jadi, du = (2x + y)dx + (x + 1)dy

Contoh 7. Carilah diferensial total dari multivariabel u = $x^2 + 5x + 4xy + 3y^2 + 5y - 2yz + 3z^2 - 6z - 3xz$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = u_x = 2x + 4y - 3z + 5$$

$$\frac{\delta u}{\partial y} = u_y = 4x + 6y - 2x + 5$$

$$\frac{\delta u}{\delta z} = u_z = 3x - 2y + 6z - 6$$

Jadi, du = (2x + 4y – 3 + 5)dx + (4x + 6y – 2z + 5)dy + (-3x – 2y + 6z – 6)dz

9.4 DIFFERENSIAL TOTAL ORDO LEBIH TINGGI

Contoh-contoh diatas merupakan diferensial total untuk turunan pertama (berderajat satu). tentu saja dengan adanya perluasan dapat pula dicari bentuk diferensial total dari turunan kedua (*second ordo total differensial*), turunan ketiga, turunan keempat dan seterusnya. Namun demikian untuk menghindari pembahasan yang terlalu lebar, akan batasi bahasan ini sampai pada ordo turunan kedua saja.

Dengan mengambil bentuk diferensial total ordo pertama seperti rumus 9-4, maka dierensial total ordo kedua d^2 dapat dijabarkan:

$$d^2u = \frac{\delta}{\delta y} = (f, dx + dy)dx + \frac{\delta}{\delta y}(f, dx + fy\ dy)dy$$

$$= (f_{xx}\ dx + f_{xy})\ dx + (f_{yx}\ dx + f_{xy})dy$$

$$= f_{xx}\ dy^2 + f_{xy}\ dydx + f_{yx}\ dxdy + f_{yy}\ d^2y$$

Karena $f_{xy} = f_{xy}$ maka:

$$d^2u = f_{xx}\ dx^2 + 2f_{xy}\ dydx + f_{yy}\ dy^2 \qquad 9-5$$

Contoh 8. Carilah diferensial total turunan kedua dari fungsi u = $3x^2 - 5yx + 8y^2$.

$$\frac{\delta u}{\delta x} = f_x = 6x - 5y \qquad \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = f_x = 6$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = f_y = 5x - 18y \qquad \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = f_{yy} = 18$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta x} = f_{xy} = f_{yx} = -5$$

Jadi, $d^2u = 6\ dx^2 - 10\ dydx + 18dy^2$

Contoh 9. Carilah diferensial total turunan kedua dari $u = 2x^3 - y^2$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = f_x = 6x^2 \qquad \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = f_{xx} = 12x$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = f_y = -2y \qquad \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta x} = f_{xy} = f_{yx} = 0$$

Jadi, $d^2u = 12x\ dx^2 - 2dy^2$

9.5 TURUNAN TOTAL

Pada diferensial total fungsi f(x,y) yang dijumpai biasanya dianggap bahwa x dan y merupakan variabel bebas yang masing-masing tidak ada hubungannya. Akan tetapi kenyataannya variabel x dan y saling berkaitan secara fungsional misalnya y = h(x).

Secara singkat turuman total (*total derivative*) dengan mengambil diferensial totalnya dapat dituliskan sebagai:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = f_X = f_y \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = f_X \frac{\delta x}{\delta y} + f_y \qquad 9 - 6$$

Contoh 10. Carilah turunan total dan du/dy, apabila diketahui $u = f(x\text{-}y) = 5x^2 - 4y$ dimana $y = 2x^2$

a. Turunan total berkenaan dengan x :

$$f_x = \frac{\delta u}{\delta x} = 10x, f_y = \frac{\delta u}{\delta y} = -4 \frac{\delta y}{\delta x} = 4x$$

$$\text{Jadi, } \frac{\delta u}{\delta x} = f_x + f_y = \frac{\delta y}{\delta x} = 10x + (-4)(4x) = 10x - 16x$$

b. Turunan total berkenaan dengan y :

$$f_x = \frac{\delta u}{\delta x} = 10x, f_y = \frac{\delta u}{\delta y} = -4 \text{ dan } \frac{\delta x}{\delta y} = 1/(dy/dx) = \frac{1}{4x}$$

$$\text{Jadi,} \frac{\delta u}{\delta y} = f_x \frac{\delta x}{\delta y} = f_y = 10x\,(\frac{1}{4x}) - 4 = 2{,}5 - 4 = -1{,}5$$

Persoalan turunan total ini dapat kita perluas dengan hubungan-hubungan yang lain misalnya x = g(t) dan y = h(t), di mana t juga merupakan variabel bebas yang berpengaruh terhadap x maupun y. Seperti kita ketahui bahwa δu/δx merupakan perubahan dalam karena perubahan yang kecil dalam dengan mengasumsikan y konstan. Selanjutnya dx/dt merupakan perubahan dalam x sebagai akibat dari suatu perubahan yang kecil dalam t. Dengan demikian δu/δx (dx/dt) merupakan perubahan dalam u sebagai akibat perubahan yang kecil dalam t yang diselesaikan melalui x, demikian juga untuk δu/δy-(dy/dt). Jadi, turunan total juga dibentuk dari:

$$\frac{du}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_x \frac{dy}{dt} \qquad 9-7$$

Contoh 11. Carilah turunan total du/dt, apabila diketahui u = f(x,y) = $x^2 + 2y^2$ di mana x = 2t dan y = t^2..

$$\text{Untuk, } fx = \frac{\delta u}{\delta t} = 2x \qquad fx = \frac{\delta u}{\delta y} = 4 \qquad \frac{dx}{dt} = 2 \;\text{ dan } fx = \frac{dy}{dt} = 2t$$

Jadi, turunan total berkenaan dengan t adalah:

$$\frac{du}{dt} = f_x = \frac{dx}{dt} + f_x \frac{dy}{dt} = 2x(2) + 4y(2t)$$

= 4x + 8yt

9.6 TURUNAN FUNGSI IMPLISIT

Fungsi dalam bentuk u = f(x,y,z) menyatakan bahwa besarnya u secara eksplisit ditentukan oleh besarnya variabel-variabel x, y dan z yang disebut sebagai fungsi eksplisit (*explisit functions*). Tetapi bila kemudian u dimasukkan ke dalam fungsinya sehingga dijumpa bentuk f(x,y,zu) = 0, maka fungsi tersebut disebut fungsi implisit (*implicit functions)*.

Jika ditunjukkan suatu fungsi W = F(x,y,z,u) dan juga dengan asumsi yang ditentukan u = f(x,y,z) maka turunan parsial masing-masingnya.

$$f_X = \frac{\delta u}{\delta x} \text{dan } f_y = \frac{\delta u}{\delta y} \text{ dan } f_X = \frac{\delta u}{\delta z}$$

Dengan menggunakan kaidah diferensial total akan diperoleh,

$$dW = F, dx + F_y\, dy + F_z\, dz + F_u\, du = 0 \qquad 9\text{-}8$$

Kita juga memperoleh persamaan,

$$du = f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dx$$

Dengan menusbstitusikan bentuk du ke dalam rumus 10-7 menjadi,

$$dQ = F_k\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz + F_u\, (f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz) = 0$$

$$= (F_x + F_u.\, f_x)\, dx + (F_y + F_u.\, f_y)dy + (F_z + F_u.f_z)dz = 0$$

Karena tidak ada pembatasan perpindahan untuk x,y dan z, maka solusi dari persamaan di atas hanya mungkin apabila koefisien dx, dy dan dz sama dengan nol. Dengan demikian kita akan mendapatkan bentuk yang terakhir:

$$F_x + f_x\, .\, F_u = 0$$

$$F_y + f_y\, .\, F_u = 0$$

$$F_y + f_z\, .\, F_u = 0 \qquad 9-9$$

Sehingga: $f_x = \frac{du}{dx} = -\frac{F_x}{F_u}y$

$$f_y = \frac{du}{dx} = -\frac{F_y}{F_u}$$

$$f_z = \frac{du}{dz} = -\frac{F_z}{F_u} \qquad 9-10$$

Contoh 12. Carilah turunan dy/dx fungsi-fungsi implisit berikut:

a. $u = 8x^2 - 4y = 0$

jika y = f(x), maka mengambil turunan implisitnya diperoleh:

$$du = f_X\, dx + f_y\, dy = 0 \rightarrow \frac{du}{dz} = -\frac{F_z}{F_u}$$

$du/dx = f_x = 16x$ dan $du/dy = f_y = -4$. Jadi,

$$\frac{d_y}{d_X} = \frac{f_X}{f_y} = \frac{16x}{-4} = 4x$$

b. $u = 8x - 4y = 0$

Jika y = f(x), maka dengan mengambil turunan implisitnya.

$$du = f_X dx + f_y, d_y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f_X}{f_y}$$

$du/dx = f_x = 16x$ dan $du/dy = f_y = -4$. Jadi,

$$\frac{d_y}{d_x} = \frac{f_x}{f_y} = \frac{8}{-4} = 2$$

c. $u = x^3 + y^3 - 3xy = 0$

du/dx = $f_x = 3x^2 - 3y$ dan du/dy = $f_y = 3y^2 - 3x$. Jadi,

$$\frac{d_y}{d_x} = \frac{f_x}{f_y} = \frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} = -\frac{(x^2 - y)}{(y^2 - x)}$$

9.7 TURUNAN PARSIAL: FUNGSI EKONOMI

Pendekatan diferensial parsial sangat lazim diterapkan dalam teori-teori ekonomi yang mengandung lebih dari satu variabel bebas, misalnya mengukur tingkat elastisitas silang permintaan, menentukan produktivitas marginal faktor-faktor produksi, mengukur angka pengganda (*multiplier*) penentuan pendapatan dan lain-lain.

Pada bab sebelumnya, konsep elastisitas telah dibicarakan secara lengkap dengan menggunakan pendekatan diferensial parsial untuk mengukur tingkat koefisien elastisitas. Pasal berikut ini, secara umum akan kita sajikan penerapan pendekatan diferensial parsial dan beberapa contoh soal seperti menghitung produktivitas marginal dan mengukur angka pengganda model penentuan pendapatan nasional.

9.7.1 Produktivitas Marginal

Produk fisik marginal (MPP) didefinisikan sebagai perubahan dalam output yang disebabkan oleh suatu perubahan kecil dalam variabel tertentu apabila semua faktor produksi lainnya dianggap tetap Kita ambil fungsi produksi tradisional yaitu fungsi Cobb-Douglas:

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta} \qquad 9 - 11$$

Dengan mengambil turunan parsial berkenaan dengan K (modal),

Maka:

$$MPP_K = \frac{\delta Q}{\delta K} = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} \qquad 9 - 12$$

Hal yang sama pada turunan parsial berkenaan dengan L. (tenaga kerja)

$$MPP_L = \frac{\delta Q}{\delta L} = A\beta K^{\alpha-1}L^{\beta-1} \qquad 9 - 13$$

Contoh 13. Fungsi produksi Cobb-Douglas $Q = 100K^{0,5}L^{0,5}$. Hitunglah Produktivitas marginal modal dan tenaga kerja. Tentukan pengaruh tambahan satu unit modal dan tenaga kerja terhadap output untuk K = 10 dan L= 10.

a. Produksivitas marginal modal — Produksivitas marginal tenaga kerja

$MPPx = \delta Q/\delta K = 50K^{-0,5}L^{0,5}$ — $MPP_L = \delta Q/\delta L = 50K^{0,5}\text{-}L^{-0,5}$

b. Pengaruh dari tambahan satu unit dalam K, $\Delta Q = (\delta Q/\delta K)\Delta K$

Pada K = L = 10, maka $\Delta Q\ 50(10)^{-0,5}\ (10)^{0,5}$

Dengan mengambil logaritma maka,

$\log \Delta Q = \log 50 – 0.5\log 10 + 0,5\log 10 = 1.6990 – 0,5 + 0,5$

$= 1,6990 \rightarrow \Delta Q = \text{antilog}\ (1.6990) = 50$

c. Untuk pengaruh dari tambahan satu unit dalam L, $\Delta Q\ (\delta Q/\delta L)\Delta L$

Pada K = L = 10, maka $\Delta Q – 50(10)^{0,5}(10)^{-0,5}$

Dengan mengambil logaritma maka,

$\log \Delta Q \quad = \log 50 + 0,5\log 10 – 0,5\log 10 = 1.6990 + 0,5 – 05$

$= 1,6990 \rightarrow \Delta Q = \text{antilog}\ (1.6990) = 50$

Contoh 14. Kerjakan kembali contoh-13, jika diberikan fungsi produksi yang dinyatakan sebagai $Q = 20K^{0,2}\ L^{0,5}$ untuk K – 10 dan L = 20

a. Produksivitas marginal modal — Produksivas marginal tenaga kerja

$MPP_K = \delta Q/\delta K = 4K^{-0,8}\ L^{0,5}$ — $MPP_L = \delta Q/\delta L = 10K^{0,2}\ L^{-0,5}$

b. Pengaruh dari tambahan satu unit dalam K, $\Delta Q\ (\delta Q/\delta K)\Delta K$

Pada K = 10, L = 20, maka $\Delta Q = 4(10)^{0,8}(20)^{0,5}$

$\log \Delta Q = \log 4 – 0,8\log 10 + 0.5\log 20 = 0,6021 – 0,5 + 0,5(1,3010)$

$= 0,7526\text{-AQ} = \text{antilog}\ (0,7526) = 5.6575$

c. Pengaruh dari tambahan satu unit dalam L, $\Delta Q = (\delta Q/\delta L)\Delta L$

Pada K = 10, L = 20, maka $\Delta Q\ 10(10)^{0,2}\ (20)^{-0,5}$

$\log \Delta Q = \log 10 + 0,2\log 10 – 0,5\log 20 =1 + 0,2 – 0,5(1.3010)$

$= 0,5495 \rightarrow \Delta Q = \text{antilog}\ (0.5495) = 3,5441$

9.7.2 Angka Pengganda Penentuan Pendapatan Nasional

Dalam kaitannya dengan model penentuan pendapatan nasional (Y), konsep diferensial parsial dapat diterapkan untuk memperoleh berbagai angka pengganda dari beberapa variabel atau parameter model penentuan pendapatan nasional.

Contoh 15. Diketahui perekonomian 3 sektor: Y = C + I + G

dengan, $C = C_{,} + bY_d$ $\quad C_2 = 60$ $\quad b = 0,5$

$G = G_1 = 100$ $\quad I = L = 40$

a. Berapa tingkat keseimbangan pendapatan nasional Y.
b. Tunjukkan pengaruh terhadap tingkat penghasilan keseimbangan pendapatan nasional dari perubahan satu unit pengeluaran pemerintah.
c. Hitunglah pengaruh terhadap keseimbangan pendapatan nasional jika pemerintah menaikkan pengeluaran sebesar 25.

a. Tingkat keseimbangan pendapatan nasional Y adalah,

$$\mathrm{Y} = \frac{C_o + I_o + G_o}{(1-b)} = \frac{1}{(1-b)} = (C_o + I_o + G_o)$$

$$= \frac{1}{(1-0,5)} = (60 + 40 + 100) = 2(200) = 400$$

b. $\frac{\delta Y}{\delta G_o} = \frac{1}{(1-b)} = \frac{1}{(1-0,5)} = 2 > 0$

Kenaikan satu unit pembelanjaan pemerintah, akan menaikkan tingkat pendapatan keseimbangan sebesar 1/(1 – b) = 2.

c. Pemerintah menaikkan pengeluaran sebesar 25. Jadi,

$$\Delta \mathrm{Y} = \frac{1}{(1-\mathrm{b})} \Delta G_o = \frac{1}{(1-\mathrm{b})}(25) = 2(25) = 50$$

Contoh 16. Diketahui perekonomian suatu negara 3 sektor Y = C + I + G. Jika tingkat konsumsi negara itu diberikan oleh persamaan $C = C_o + bY_d$ dan investasi $I = I_o = 200$, pengeluaran pemerintah $G = G_o = 900$ dan pajak yang diterima $T = T_o + tY$ + (C_o = 600, b = 0,6 t = 0,2 dan T_o = 200).

a. Berapa tingkat keseimbangan pendapatan nasional Y.

b. Tunjukkan bahwa pengaruh perubahan satu unit dalam pengeluaran pemerintah yang diimbangi secara persis oleh perubahan satu unit dalam pajak otonom berpengaruh positif terhadap pendapatan keseimbangan.

a. Tingkat keseimbangan pendapatan nasional Y adalah:

$$Y = \frac{C_o - bT_o + I_o + G_o}{(1 - b + bt)} = \frac{1}{(1 - b + bt)} = (C_o - bT_o + I_o + G_o)$$

$$= \frac{1}{0{,}52} = (1600) = 3.077$$

b. Angka pengganda pengeluaran pemerintah

$$\frac{\delta Y}{\delta G_0} = \frac{1}{(1 - b + bt)} = (1/0{,}52) = -1{,}923$$

Angka pengganda pajak otonom:

$$\frac{\delta Y}{\delta T_0} = \frac{1}{(1 - b + bt)} = (-0{,}6/0{,}52) = -1{,}1538$$

Jadi, pengaruh gabungan dari kenaikan satu unit pengeluaran pemerintah dan satu unit kenaikan pajak otonom adalah:

$$\Delta Y = \frac{\delta Y}{\delta G_0} = \Delta G_o + \frac{\delta Y}{\delta G_0}\Delta T_o = \frac{-1}{(1 - b + bt)} + \frac{-b}{(1 - b + bt)}$$

$= 1{,}923 – 1{,}1538 = 0{,}77 > 0$ (positif)

Contoh 17. Dengan menggunakan data-data contoh 16 di atas:

a. Bagaimana pengaruh terhadap keseimbangan pendapatan nasional jika pajak proporsional (t) dinaikkan 15 persen.
b. Jika pemerintah akan merubah tarif pajak marginal semula sebesar 20 persen untuk mencpai keseimbangan pendapatan Y = 1.250, berapa persen harus merubah pajak proporsional tersebut.

a. Pajak proporsional dinaikkan 15 persen:

$\Delta t = (20\%)(0{,}15) = 0{,}03$

Tingkat keseimbangan pendapatan nasional Y adalah:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-b(C_o - bT_o + I_o + G_o)}{(1 - b + bt)^2} = \frac{-bY}{(1 - b + bt)}$$

$$= \frac{-0{,}6(0{,}77)}{0{,}52} = -3{,}550$$

Kenaikan satu unit pajak proporsional akan menurunkan keseimbangan pendapatan sebesar -3.550. Dengan demikian, adanya kenaikan pajak proporsional 15 persen, keseimbangan pendapatan akan turun sebesar.

$$\Delta Y = \frac{\Delta Y}{\delta t}\Delta t = (-3{,}550)(0{,}03) = -106{,}3$$

b. Pemerintah akan menaikkan pendapatan sebesar 250 (ΔY = 1.250 – 1.000) sehingga:

$$\Delta Y = \frac{\Delta Y}{\delta}\Delta t \rightarrow 250 = (-3.550)\Delta t \rightarrow \Delta t = 250(-3.550) = -0.074$$

Tarif pajak harus dikurangi kira-kira sebesar 7 persen. Jadi, tarif pajak yang baru adalah (20 – 7) persen = 13 persen.

Contoh 18. Diketahui perekonomian 3 sektor, Y = C + I + G

$C = C_o + bY_d$ $I = I_o$ dan $T = T_o + tY$

Dimana: $C_o = 400$ b. = 0,8 $I_o = 100$

$T_o = 500$ $G_o = 700$ $t = 0{,}25$

a. Hitunglah tingkat keseimbangan pendapatan nasional.
b. Bagaimanakah pengaruh kenaikan satu unit pengeluaran pemerintah terhadap keseimbangan pendapatan.
c. Bagaimana pengaruh kenaikan satu unit pajak otonom terhadap tingkat keseimbangan pendapatan.
d. Hitunglah keseimbangan pendapatan, jika pemerintah menaikkan pajak otonom sebesar 100.

a. Tingkat keseimbangan pendapatan nasional Y adalah:

$$Y = \frac{C_o - bT_o + I_o + G_o}{(1 - b + bt)} = \frac{1}{(1 - b + bt)} = (C_o - bT_o + I_o + G_o)$$

$$Y = \frac{1}{1 - 0{,}8 + 0{,}8(0{,}25)}[400 - 0{,}8(500) + 300 + 700]$$

$$= \frac{1}{0{,}4} = (1.000) = 2.500$$

b. Pengaruh perubahan dalam pembelanjaan pemerintah terhadap tingkat pendapatan nasional:

$$\frac{\delta Y}{\delta G_o} = \frac{-1}{(1 - b + bt)} = (1/0{,}4) = 2{,}5 > 0$$

Jadi, kenaikan pengeluaran pemerintah mengakibatkan kenaikan pendapatan nasional.

c. Pengaruh perubahan dalam pajak otonom terhadap tingkat pendapatan:

$$\frac{\delta Y}{\delta G_o} = \frac{-b}{(l - b + bt)} = (-0{,}8/0{,}4) = -2 > 0$$

Kenaikan pajak otonom mengakibatkan penurunan tingkat pendapatan

d. Jika pemerintah menaikkan pajak otonom sebesar 100

$$\Delta Y = \frac{\delta Y}{\delta G_o} \Delta T_o = \frac{-b}{(1 - b + bt)} = (100) = -2(100) = -200$$

Contoh 19. Jika (pada contoh-18) pemerintah berkehendak menaikkan tingkat pendapatan nasional menjadi Y= 2.750 yaitu dengan penggunaan tenaga kerja penuh (*full employment*):

a. Berapa pajak otonom yang harus dipotong untuk mendapatkan pendapatan tersebut atau
b. Berapa besar kenaikan pembelanjaan pemerintah.
c. Jelaskan pengaruhnya pada defisit pemerintah, jika kebijaksanaan butir (a) yang diterima atau butir (b) yang digunakan.

Tingkat pendapatan sebelumnya Y,= 2.500 dan sekarang Y_2 = 2.750.

Ada kenaikan dalam aktivitas ekonomi yaitu AY = 2.750 - 2.500 = 250.

a. Jika pemerintah bermaksud mengubah pajak otonom untuk mencapai tenaga kerja penuh maka:

$$\Delta Y = \frac{\delta Y}{\delta T_o} \Delta T_o \rightarrow 250 = (-2).\Delta T_o \text{ diperoleh } \Delta T_o = -125$$

Jadi, pemerintah harus memotong pajak otonom sebesar 125 untuk dapat menaikkan pendapatan nasional menjadi Y = 2.750

b. Jika pemerintah bermaksud mengubah pembelanjaan untuk mencapai tenaga kerja penuh maka:

$$\Delta Y = \frac{\delta Y}{\delta G} \Delta G_o \rightarrow 250 = (2{,}5).\Delta G_o \text{ diperoleh } \Delta G_o = 100$$

Tingkat pengeluaran pemerintah sebesar 100 untuk menaikkan pendapatan nasional menjadi Y = 2.750.

c. Kondisi keuangan pemerintah ditentukan oleh selisih penerimaan pajak (T) dan pengeluaran pemerintah (G).

Pada tingkat pendapatan nasional semula Y= 2.500, maka

T = T + 1Y – T = 500 + 0,25(2.500) = 1,125 dan G = G_o = 700

(T – G) = 1.125 – 700 = 425 $\rightarrow$ pemerintah mempunyai surplus 425.

*) *Jika pemerintah mengurangi pajak otonom T, sebesar 125*:

Penerimaan pajak mula-mula berkurang 125, akan tetapi pengaruh dorongan terhadap pendapatan sebesar 250 membawa pengaruh positif pada perolehan pajak total yaitu ΔT = 0,25(250) = 62,5. Dengan demikian biaya bersih dari pengurangan pajak otonom untuk mendorong perekonomian pada tenaga kerja penuh adalah (125 – 62,5 = 62,5).

Surplus pemerintah berkurang menjadi (425 – 62,5 = 362,5). Besarnya surplus ini dapat juga dicari dari perhitungan sebagai berikut:

T = T_o + tY = (500 – 125) + 0,25(2.750) dan G = G_o = 700

= 375 +687,5 = 1.062.5

Jadi, T-G,= 1.062,5-700=362,5 cocok!

*) Jika pemerintah menaikkan pembelanjaannya sebesar 100.

Pengeluaran pemerintah akan naik sebesar 100. Akan tetapi penerimaan pajak total juga akan naik akibat dorongan peningkatan pendapatan yaitu sebesar ΔT = 0,25(250) = 62.5 Dengan demikian biaya bersih dari kebijaksanaan kenaikan pembelanjaan untuk mendorong perekonomian pada tenaga kerja penuh adalah (100-62.5 = 37.5)

Jadi, surplus pemerintah berkurang menjadi (425 – 37.5 = 387,5). Angka surplus ini dapat juga dicari dari perhitungan:

T = T_0 + tY = 500 + 0,25(2.750) dan G_o = 700 + (100) = 800

= 500 + 687,5 = 1.187.5

Jadi, T – G_0 = 1.187,5 – 800 – 387,5 cocok!

9.8 OPTIMISASI FUNGSI MULTIVARIABEL

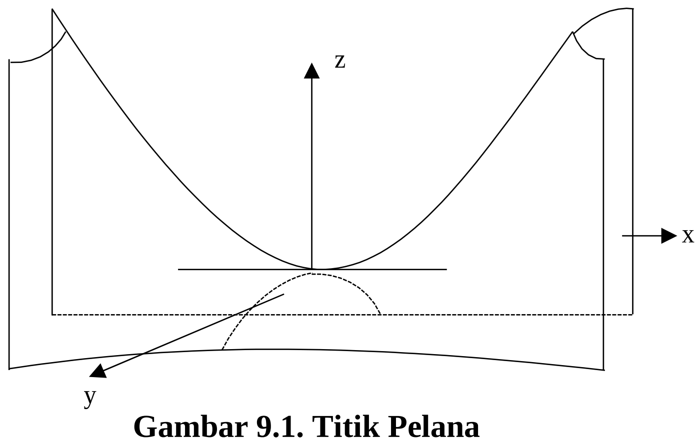
Nilai-nilai kritis sebuah fungsi multivariabel yang mengandung lebih dari dua variabel bebas dapat dicari dengan suatu pengujian sampai turunan parsial keduanya.

Untuk mencari nilai-nilai optimum (maksimum atau minimum) dari suatu fungsi multivariabel bebas z = f(x,y) dibutuhkan syarat yang diperlukan (*necessary condition*) yaitu δz/δx = 0,δz/δy = 0. Untuk mengetahui apakah titik kritis itu berupa titik maksimum atau titik minimum dibutuhkan syarat yang mencukupi (*sufficient condition*) yaitu:

1. Mencapai titik kritis : $\frac{\delta z}{\delta x} = 0$ dan $\frac{\delta z}{\delta y} = 0$ ....
2. Mencapai maksimum bila : $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} < 0$ dan $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} < 0$ ....
3. Mencapai minimum bila : $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} > 0$ dan $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} < 0$ ....

Evaluasi hasil kali : $\left[\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}\right] > \left[\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right]^2$ .... 9 – 14

Jika syarat (3) yaitu evaluasi hasil kali dan syarat jenjang kedua tidak seluruhnya terpenuhi maka titik kritisnya berupa *titik belok* atau *titik pelana* (*sadle*). Titik pelana terjadijika suatu fungsi beradapada maksimum bila dipandang sepanjang satu sumbu dan minimum bila dipandang sepanjang sumbu yang lain. Turunan parsial langsung kedua memiliki tanda yang berbeda.



Gambar 9.1. Titik Pelana

Contoh 20. Selidiki fungsi z = $-2x^2 + 3xy - 5.5x - 3y^2 + 13{,}5y$ berada pada maksimum, minimum, titik belok atau titik pelana dan hitungkan nilai ekstrim pada titik tersebut.

a. Syarat fungsi mencapai ekstrim maksimumkan/minimum:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = -4x + 3y - 5{,}5 = 0 \text{dan } \frac{\delta x}{\delta y} = 3x - 13{,}5 = 0$$

Apabila diselesaikan secara simultan diperoleh x = 0,5 dan y = 2,5

b. Pengujian syarat turunan parsial kedua:

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = -4 < 0 \qquad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = -6 < 0 \qquad \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x} = 3$$

c. Evaluasi hasil kali parsial-pasial keduanya:

$$[\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}] > [\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}]^2 \rightarrow |(-4)(-6)| > (3)^2 \text{ syarat evaluasi hasil kali dipenuhi}$$

Parsial kedua langsung semuanya negatif, menunjukkan bahwa fungsi berada pada titik maksimum sepanjang sumbu-sumbu utama. Jadi, fungsi tersebut berada pada titik maksimum jika dievaluasi pada nilai-nilai kritis x = 0,5 dan y = 2.5.

d. $z = -2(0{,}5)^2 + 3(0{,}5 \text{ x } 2{,}5) – 5{,}5(0{,}5) – 3(2{,}5)^2 + 13{,}5(2{,}5) = 15{,}5$

Contoh 21. Selidikilah apakah fungsi $z = ½\ x^2 – xy + 5y^2 – 27y$ berada pada titik maksimum, minimum atau belok pada titik ekstrim dan hitunglah nilai ekstrim tersebut.

a. Syarat fungsi mencapai ekstrim maksimum/minimum:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = x - y = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\delta z}{\delta x} = -x + 10y - 27 = 0$$

Apabila diselesaikan secara simultan diperoleh x = 3 dan y = 3

b. Pengujian syarat turunan parsial kedua:

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = 1 < 0 \qquad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 10 < 0 \qquad \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x} = 1$$

c. Evaluasi hasil kali parsial-parsial keduanya:

$$[\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}] > [\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}]^2 \rightarrow |(1)(10)| > (-1)^2 \text{ syarat evaluasi hasil kali dipenuhi}$$

Parsial kedua langsung semuanya positif, menunjukkan bahwa fungsi berada pada titik minimum sepanjang sumbu-sumbu utama. Jadi, fungsi tersebut berada pada titik minimum jika dievaluasi pada nilai-nilai kritis x = 3 dan y = 3.

d. $z = ½\ (3) – (3)(3) + 5(3)^2 – 27(3) = –40{,}5$.

Contoh 22. Seperti contoh-20, fungsi z = 2,5x^2 + 3xy + 8x + 0,5y^2.

a. Syarat fungsi mencapai ekstrim maksimum/minimum:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 5x + 3y + 8 = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\delta z}{\delta y} = 3x + y = 0$$

Apabila diselesaikan secara simultan diperoleh x = 2 dan y = -6

b. Pengujian syarat turunan parsial kedua:

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = 5 < 0 \qquad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 1 < 0 \qquad \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x} = 1$$

c. Evaluasi hasil kali parsial-parsial keduanya:

$$[\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}] > [\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}]^2 \rightarrow |(5)(1)| > (3)^2 \text{ syarat evaluasi hasil kali dipenuhi}$$

Parsial kedua langsung semuanya positif, menunjukkan bahwa fungsi berada pada titik minimum sepanjang sumbu-sumbu utama. Akan tetapi evaluasi hasil kali tidak dipenuhi sehingga fungsi tersebut tidak minimum ke semua arah. Jadi, fungsi berada pada titik belok jika dievaluasi pada titik-titik kritis x = 2 dan y = -6.

d. z = 2,5(2) + 3(2)(-6) + 8(2) + 0,5$(-6)^2$ = 8.

Contoh 23. Seperti contoh-20, z = 3x^2 + 4xy – 5x - 2y^2.

a. Syarat fungsi mencapai ekstrim maksimum/minimum:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 6x + 4y - 5 = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\delta z}{\delta y} = 4x + 4y = 0$$

Apabila diselesaikan secara simultan diperoleh x = 0,5 dan y = 0,5

b. Pengujian syarat turunan parsial kedua:

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = 6 < 0 \qquad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = -4 < 0 \qquad \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x} = 4$$

c. Evaluasi hasil kali parsial-parsial keduanya:

$$[\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}] > [\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}]^2 \rightarrow |(6)(-4)| < (4)^3 \text{ syarat evaluasi hasil kali dipenuhi}$$

Parsial kedua langsung mempunyai tanda yang berlawanan dan pengujian hasil kali parsial-parsial keduanya lebih kecil dari kuadrat parsial silangnya. Jika dievaluasi pada nilai-nilai kritisnya, fungsi tersebut tidak berada pada maksimum atau minimum melainkan pada titik pelana.

d. z = 2,5$(2)^2$ + 4(0,5)(0,5) – 5$(0,5)^2$ + 2$(0,5)^2$ = -125.

9.9 OPTIMISASI FUNGSI EKONOMI MULTIVARIABEL

Berangkat dari pembicaraan optimisasi suatu fungsi multivariabel di atas dan pembicaraan awal tentang menentukan maksimisasi atau minimisasi, maka pemecahan fungsi-fungsi ekonomi seperti maksimisasi keuntungan, minimisasi biaya produksi dan lain-lain dapat didekati dengan pendekatan diferensial parsial fungsi multivariabel.

Sebuah perusahaan yang memproduksi dua atau lebih jenis barang (Q_1, Q_2,…. Q_3) dan biaya yang dibutuhkan untuk memproduksi dua atau lebih jenis barang itu merupakan biaya gabungan (*joint cost function*) TC = f(Q. QQ): maka dalam hubungannya dengan upaya memaksimumkan keuntungan, seorang produsen akan selalu berusaha mendorong agar bisa mendapatkan keuntungan maksimum.

Jika fungsi pendapatan untuk masing-masing barang dinyatakan sebagai: $TR_1 = f(Q_1)$, $TR_2 = f(Q_2)$, ..., $TR_n= f(Q_n)$ dan fungsi biaya total gabungan dinyatakan: $TC = f(Q_1, Q_2,\ldots\ldots, Q_n)$ maka fungsi keuntungan dapat dinyatakan sebagai:

$$
\begin{aligned}
\pi\,(Q_1, Q_2,\ldots\ldots, Q_n) &= TR - TC \\
&= [f(Q_1) + f(Q_2) + \ldots + f(Q_n)] - f(Q_1, Q_2,\ldots\ldots, Q_n) \\
&= g(Q_1, Q_2,\ldots\ldots, Q_n) \qquad 9-15
\end{aligned}
$$

syarat keharusan agar keuntungan maksimum adalah:

$$\delta\pi(Q_1)/\delta Q_1 = 0$$

$$\delta\pi\,(Q_1)/\,\delta Q_2 = 0$$

$$\delta\pi\,(Q_n)/\,\delta Q_n = 0 \qquad 9-16$$

Contoh 24, Seorang monopolis yang menawarkan dua jenis barang yang berbeda dari suatu produk dengan fungsi permintaan masing-masing dicerminkan oleh persamaan: $Q_1 = 50 - P_1$ dan $Q_2 = 40 - P_2$ serta fungsi biaya gabungan $TC = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$. Hitunglah berapa harga masing-masing barang untuk memaksimumkan laba perusahaan.

a. Pendapatan total, $TR = TR_1 + TR_2 = P_1Q_1 + P_2\,Q_2$

   Biaya gabungan, $TC = Q_1^2 + 2Q_1\,Q_2 + Q_2^2$

   Fungsi laba $\pi = TR - TC = P_1Q_1 + P_1Q_2 - (Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2)$……*)

   Kita ubah terlebih dulu permintaan dengan memecahkan P dalam Q yaitu:

   $Q_1 = 50 - P_1 \quad \rightarrow P_1 = 50 - Q_1$ ……………………………**)

$Q_2 = 50 - P_2 \quad\quad \rightarrow P_2 = 50 - Q_2$ ....***)

dengan mensubstitusikan persamaan **) dan ***) pada *), maka

$\pi = (50 - Q_1)\, Q_1 + (40 - Q_2)\, Q_2 - (Q_1^2 + Q_1\, Q_2 + Q_2^3)$

$\pi = -2Q_1^2 + 50Q - 2Q_2^2 + 40Q_2 - 2Q_1\, Q_2$

Syarat fungsi mencapai ekstrim maksimum/minimum:

$\delta\pi/\delta Q_1 = -4Q_1 + 50 - 2Q_2 = 0 \rightarrow 4Q_1 + 2Q_2 = 50$

$\delta\pi/\delta Q_2 = -4Q_2 + 40 - 2Q_1 = 0 \rightarrow 4Q_2 + 2Q_1 = 40$

Apabila diselesaikan secara simultan diperoleh $Q_1 = 10$ dan $Q_2 = 5$

Pada Q = 10 unit $\rightarrow P_1 = 50 - (10) = 40$

Pada Q = 5 unit $\quad \rightarrow P_1 = 40 - (5) = 35$

b. Pengujian syarat turunan parsial kedua:

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta {Q_1}^2} = -4 < 0 \qquad \frac{\delta^2\pi}{\delta {Q_2}^2} = -4 < 0 \qquad \frac{\delta^2\pi}{\delta {Q_1}^2 \delta {Q_2}^2} = \frac{\delta^2\pi}{\delta Q_2 \delta Q_1} = -2$$

c. Evaluasi hasil kali parsial-parsial keduanya:

$$\left[\frac{\delta^2\pi}{\delta {Q_1}^2} \cdot \frac{\delta^2\pi}{\delta {Q_2}^2}\right] > \left[\frac{\delta^2 z}{\delta Q_1 \delta Q_2}\right]^2 \rightarrow |(-4)(-4)| > (-2)^2 \text{ syarat evaluasi hasil kali dipenuhi}$$

d. Agar laba maksimum, harga masing-masing barang ditetapkan sebesar $P_1 = 40$ dan $P_2 = 35$ yang mensyaratkan penjualan $Q_1 = 10$ dan Q = 5 unit.

Besarnya laba yang diperoleh $\pi = -2(10)^2 + 50(10) - 2(5)^2 + 40\,(5) - 2(10)(5) = 350$

Contab 25. Perusahaan monopolis memproduksi dua macam barang dengan biaya total ditunjukkan oleh persamaan $TC = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$. Jika harga jual masing-masing barang $P_1 = 29$ dan $P_2 = 10$. Hitunglah berapa unit masing-masing barang harus diproduksi agar keuntungan perusahaan maksimum.

a. Pendapatan total, $TR = 29Q_1 + 10Q_2$:

Biaya gabungan, $TC = Q_1^2 + Q_1\, Q_2 : +20_2^2$

Fungsi laba $\pi = TR - TC = 29Q_1 + 10Q_2 - (Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2)$

Syarat fungsi mencapai ekstrim maksimum/minimum:

$\delta\pi/\delta Q_1 = -2Q_1 + Q_2 + 29 = 0 \rightarrow -2Q_1 + Q_2 = -29$

$\delta\pi/\delta Q_2 = -2Q_2 + Q_1 + 10 = 0 \rightarrow -2Q_2 + Q_1 = -10$

Apabila diselesaikan secara simultan diperoleh $Q_1 = 18$ dan $Q_2 = 7$

b. Pengujian syarat turunan parsial kedua:

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta {Q_1}^2} = -2 < 0 \qquad \frac{\delta^2\pi}{\delta {Q_1}^2} = -4 < 0 \qquad \frac{\delta^2\pi}{\delta Q_1 \delta Q_2} = \frac{\delta^2\pi}{\delta Q_2 \delta Q_1} = 1$$

c. Evaluasi hasil kali parsial-parsial keduanya:

$$[\frac{\delta^2\pi}{\delta {Q_1}^2} \cdot \frac{\delta^2\pi}{\delta {Q_2}^2}] > [\frac{\delta^2\pi}{\delta Q_1 \delta {Q_1}^2}] \rightarrow |(-2)(-4)| > (1)^2 \text{ syarat evaluasi hasil kali dipenuhi}$$

d. Pada produksi Q = 18 unit dan $Q_2 = 7$ unit, laba akan maksimum yaitu sebesar $\pi = 29(18) + 10(7) - (18)^2 - 18(7) - 2(7)^2 = 44$

Contoh 26. Perusahaan monopolis memproduksi dua macam barang dengan biaya total ditunjukkan oleh persamaan $TC = 6Q_1^2 + 50_2^2 - 4Q_2 - 80Q_1 - 60Q_1 + 1000$. Hitunglah biaya minimal dan periksalah syarat jenjang kedua.

a. Fungsi biaya total, $TC = 6Q_1^2 + 5Q_2^2 - 4Q_1Q_2 - 80Q_1 - 60Q_1 + 1000$

Syarat fungsi biaya mencapai ekstrim maksimum:

$\delta TC/\delta Q_1 = 12Q_1 - 4Q_2 - 80 = 0 \rightarrow 12Q_2 = 80$

$\delta TC/\delta Q_2 = 10Q_2 - 4Q_2 - 60 = 0 \rightarrow 10Q_2 = 60$

Apabila diselesaikan secara simultan diperoleh Q_1 10 dan $Q_2 = 10$

b. Pengujian syarat turunan parsial kedua:

$$\frac{\delta^2 TC}{\delta {Q_1}^2} = 12 < 0 \qquad \frac{\delta^2 TC}{\delta {Q_1}^2} = 10 < 0 \qquad \frac{\delta^2 TC}{\delta Q_1 \delta Q_2} = \frac{\delta^2 TC}{\delta Q_2 \delta Q_1} = 4$$

c. Evaluasi hasil kali parsial-parsial keduanya

$$[\frac{\delta^2 TC}{\delta Q_1^2} \cdot \frac{\delta^2 TC}{\delta {Q_2}^2}] > [\frac{\delta^2 TC}{\delta Q_1 \delta {Q_1}^2}] \rightarrow |(12)(0)| > (4)^2 \text{ syarat evaluasi hasil kali dipenuhi}$$

d. Pada Q = 10 unit dan $Q_2 = 10$ unit, biaya akan minimum yaitu sebesar $TC = 6(10)^2 + 5(10)^2 - 4(10)(10) - 80(10) - 60(10) + 1000 = 300$

Contoh 27. Seorang monopolis yang menawarkan dua jenis barang yang berbeda dari suatu produk dengan fungsi permintaan masing-masing dicerminkan oleh persamaan $P_1 = 60 - Q_1$ dan $P_2 = 100 - Q_2$. Jika biaya gabungan untuk memproduksi dua jenis barang itu TC = 20_1^2 + Q_1Q_2 + $3Q_2^2$. Hitunglah berapa unit barang untuk memaksimumkan laba perusahaan.

a. Pendapatan total, TR = $P_1Q_1 + P_2Q_2$

Biaya gabungan, TC = $2Q_1 + Q_1Q_2 + 3Q_2^2$

Fungsi laba π = TR – TC = $(60 – Q_1)Q_1 + (100 – Q_2)Q_2 – (2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 3Q_2^2)$

$\pi = -3Q_1^2 + 60Q_1 – 4Q_2^2 + 100Q_1 – Q_1Q_2$

Syarat fungsi mencapai ekstrim maksimum ini

$\delta\pi/\delta Q_1 = 12Q_1 + 60 – Q_2 = 0 \rightarrow 12Q_2 + Q_2 = 60$

$\delta\pi/\delta Q_2 = -8Q_2 + 100 – Q_1 = 0 \rightarrow 8Q_1 + Q_1 = 100$

Apabila diselesaikan secara simultan diperoleh $Q_1 = 4$ $Q_2 = 12$

b. Pengujian syarat turunan parsial kedua

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta {Q_1}^2} = 12 < 0 \qquad \frac{\delta^2\pi}{\delta {Q_1}^2} = -8 < 0 \qquad \frac{\delta^2\pi}{\delta Q_1 \delta Q_2} = \frac{\delta^2\pi}{\delta Q_2 \delta Q_1} = -1$$

c. Evaluasi hasil kali parsial-parsial keduanya

$$[\frac{\delta^2\pi}{\delta {Q_1}^2} \cdot \frac{\delta^2\pi}{\delta {Q_2}^2}] > [\frac{\delta^2\pi}{\delta Q_1 \delta {Q_1}^2}] \rightarrow |(-12)(-8)| > (-1)^2 \text{ syarat evaluasi hasil kali dipenuhi}$$

d. Agar laba maksimum, maka produksi yang optimum masing-masing barang ditetapkan sebesar $Q_1 = 4$ dan $Q_2 = 12$ unit.

Besarnya laba yang diperoleh $\pi = -3(4)^2 + 60(4) – 4(12\ )^2 + 100(12) – 4(12) = 768$

9.10 OPTIMISASI BERKENDALA DAN PENGGANDA LAGRANGE

Seringkali pengoptimisasian suatu fungsi yaitu mencari nilai maksimum dan minimum terkekang suatu fungsi lain yang harus dipenuhi. Dengan pengertian lain, fungsi yang hendak dioptimasikan menghadapi kendala (*constraint*). Penghitungan optimisasi sebuah fungsi yang menghadapi kendala dapat juga diselesaikan dengan Metode Lagrange yaitu dengan membentuk fungsi bars (fungsi Lagrange) yang merupakan menjumlahan dari fungsi yang hendak dioptimisasikan ditambah dengan hasilkali pengganda Langrange dengan fungsi kendalanya.

Secara umum, fungsi yang hendak dioptimasikan berkenaan dengan fungsi kendalanya dapat ditulis,

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\ [g(x,y) – b] \qquad 9 – 17$$

di mana : $L(x,y,\lambda)$ adalah fungsi *Langrangian*

: $f(xy)$ fungsi obyektif yang hendak dioptimalkan

: $g(x,y) = b$ adalah fungsi kendala (*constraining function*)

Karena kendala selalu sama dengan nol maka penambahan variabel kendala tidak merubah nilai fungsi obyektifnya. Nilai-nilai kritis x, y dan λ pada fungsi yang dioptimalkan dapat dicari dengan menetapkan turunan pertama di = 0 dan diselesaikan secara simultan. Dengan demikian syarat pertama untuk mencari nilai-nilai optimum dibutuhkan syarat yang diperlukan (*necessary condition*) yaitu:

$$\frac{\delta L}{\delta x} = f_x(x, y) + \lambda g(x, y) = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta y} = f_y(x, y) + \lambda g(x, y) = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = g(x, y) - b = 0 \qquad 9-18$$

Memberikan: $\lambda = -\frac{f_x}{g_x} = \lambda = -\frac{f_y}{g_y}$

Pengganda Lagrange (A) akan mendekati pengaruh perubahan satu unit dalam konstanta fungsi kendala terhadap fungsi obyektif yang akan dioptimumkan. Jika nilai λ (positif), maka untuk setiap kenaikan (penurunan) satu unit konstanta fungsi kendalanya, maka fungsi obyektifnya akan turun (naik) dengan nilai yang mendekati harga pengganda Lagrange. Sebaliknya jika nilai A (negatif), maka untuk setiap kenaikan (penurunan) satu unit konstanta fungsi kendalanya, maka fungsi obyektifnya akan naik (turun) dengan nilai yang mendekati harga pengganda Lagrangenya.

Contoh 28. Fungsi produksi dicerminkan dengan persamaan Q = xy (di mana x dan y adalah input produksi). Jika seorang produsen mencadangkan anggaran 1.000 rupiah untuk membeli input produksi x dan input y dengan harga masing-masing unit 1 rupiah. (a) Hitunglah masing-masing input yang harus digunakan agar produksinyamencapai optimum dan (b) Hitunglah seperti (a) jika fungsi kendalanya dinaikkan satu unit menjadi x + y = 1001.

a. Fungsi obyektif Q = xy dan fungsi kendala A (x + y – 1.000)

   Fungsi Lagrange: Q = xy + 2(x + y – 1.000)

Syarat jenjang pertama:

$Q_x = y + \lambda = 0 \quad \rightarrow x + \lambda = 0$

$Q_y = x + \lambda = 0 \quad \rightarrow x + \lambda = 0$

$Q_\lambda = x + y - 1.000 = 0 \quad \rightarrow x + y = 1000$

Penyelesaian secara simultan menghasilkan x = y = 500 dan λ = -500. Jadi, fungsi akan optimum pada nilai-nilai kritis yaitu Q = (500)(500) = 250.000

b. Fungsi obyektif Q = xy dan fungsi kendala λ (x + y – 1001)

Fungsi Lagrange: Q = xy + λ (x + y – 1001)

$Q_x = y + \lambda = 0 \quad \rightarrow x + \lambda = 0$

$Q_y = x + \lambda = 0 \quad \rightarrow x + \lambda = 0$

$Q_\lambda = x + y - 1.001 = 0 \quad \rightarrow x + y = 1001$

Apabila diselesaikan secara simultan diperoleh untuk x = y = 500,5 dan λ = -500,5. Fungsi yang baru akan optimum pada nilai-nilai kritis yaitu Q = (500,5)(500,5) = 250.500,5.

e. Karena à negatif, kenaikan satu unit konstanta kendala mengakibatkan kenaikan produksi yaitu sebesar 500.5 (mendekati pengganda Langrange asalnya λ = 500).

Contoh 29. Carilah nilai-nilai kritis yang akan dioptimumkan dari fungsi biaya C = $3x^2 - 2xy + y^2$ sesuai dengan fungsi kendala x + y = 30 yang diberikan serta perkirakan pengaruh perubahan satu unit dalam konstanta kendala terhadap fungsi obyektifnya.

a. Fungsi obyektif C = $3x^2 - 2xy + y^2$ dan fungsi kendala λ (x + y – 30)

Fungsi Lagrange: C = $3x - 2xy + y^2 + 2(x + y - 30)$

$C_x = 6x - 2y + \lambda = 0 \quad \rightarrow 6x - 2y + \lambda = 0$

$C_y = -2x + 2y + \lambda = 0 \quad \rightarrow 2x + 2y = 30$

$C_\lambda = x + y - 30 = 0 \quad \rightarrow x + y = 30$

Penyelesaian secara simultan menghasilkan x = 10, y = 20 dan λ = -20. Jadi, fungsi biaya total akan optimum pada nilai-nilai kritis yaitu C = $3(10)^2 - 2(10)(20) + (20)^2$ = 300.

b. Fungsi obyektif C = $3x^2 - 2xy + y^2$ dan fungsi kendala λ (x + y) – 31

Fungsi Lagrange: C = $3x^1 - 2xy + y^2 + \lambda (x + y - 31)$

$C_2 = 6x - 2y + A = 0 \rightarrow 6x - 2y + \lambda = 0$

$C_2 = -2x + 2y + \lambda - 0 \rightarrow 2x + 2y + \lambda = 0$

$C_\lambda = x + y – 31 = 0 \rightarrow x + y =31$

Penyelesaian secara simultan menghasilkan x = 10.33 y = 20.67 dan λ = -20,67. Jadi, fungsi biaya total akan optimum pada nilai-nilai kritis yaitu C = $3(10,33)^2$ – 2(10,33)(20,67) + $(20,67)^2$ (320,33.

c. Karena λ negatif, kenaikan satu unit kendala mengakibatkan kenaikan biaya sebesar 20,33 (mendekati pengganda Langrange asal λ = 20).

Contoh 30. Suatu perusahaan yang akan memaksimumkan laba apabila fungsi laba totalnya $\pi = -2x^2 – xy + 100x + 30y$ dan kapasitas output maksimumnya x + y = 30. Carilah bauran output barang yang harus diproduksi dan perkirakan pengaruhnya jika kapasitas output diturunkan satu unit.

a. Fungsi obyektif $\pi= -2x^2 – xy + 100x + 30y$ dan kendala λ (x + y – 30)

Fungsi Lagrange : $\pi = -2x^2 – xy + 100x + 30y + 2(x + y – 30)$

$\pi_x = -4x – y + \lambda + 100 = 0 \qquad \rightarrow 4x – y + \lambda = -100$

$\pi_y = -x + \lambda + 30 = 0 \qquad \rightarrow -x + y = -30$

$\pi_\lambda = x + y – 30 = 0 \qquad \rightarrow x – y + \lambda = 30$

Penyelesaian secara simultan menghasilkan x = 20, y 10 dan λ = -10. Jadi, fungsi laba total akan maksimum pada nilai-nilai kritis $\pi = -2(20)^2 – (20)(10) + 100(20) + 30(10) = 1300$.

b. $\pi = -2x^2 – xy + 100x + 30y$ dan kendala λ (x + y – 29)

Fungsi Lagrange: $\pi = -2x^2 – xy + 100x + 30y +\lambda (x + y – 29)$

$\pi_x = -4x – y + \lambda + 100 = 0 \qquad \rightarrow 4x – y + \lambda = -100$

$\pi_y = -x + \lambda + 30 = 0 \qquad \rightarrow -x + \lambda = -30$

$\pi_\lambda = x + y – 29 = 0 \qquad \rightarrow x + y = 29$

Penyelesaian secara simultan menghasilkan x 20,5; y = 8,5 dan λ = = -9.5. Jadi, fungsi laba total akan maksimum pada nilai-nilai kritis $\pi = -2(20,5)^2 –(20,5)(8,5) + 100(20,5) + 30(8,5) = 1290,25$.

c. Karena λ negatif, penurunan satu unit konstanta kendala mengakibatkan penurunan laba 9,5.

Contoh 31. Dalam struktur pasar monopoli diketahui fungsi permintaan ditunjukkan dalam persamaan P = 152 – Q (P = harga per unit, (Q = unit produksi). Jika total biaya produksi monopolis tersebut adalah TC = 250 + 2Q + 40 maka:

a. Carilah P,Q dan pendapatan (TR) monopolis tersebut jika yang bersangkutan menginginkan pendapatannya maksimum.

b. Carilah P,Q dan pendapatan (TR) monopolis tersebut jika yang bersangkutan menginginkan pendapatannya maksimum dan paling tidak keuntungannya (π) yang diperoleh sebesar 750.

Diketahui: $P = 152 – Q$, maka pendapatan total $TR = (152 – Q)Q$

$= 152Q – Q^2$

$TC = 250 + 20 + 4Q^2$

a. Memaksimumkan pendapatan TR, maka $dTR/dQ = 152 – 20 = 0$

$\rightarrow$ diperoleh $Q = 152/2 = 76$ unit Jadi,

Pada $Q = 76$ unit $\rightarrow P = 152 – (76) = 76$

$\rightarrow TR = 152(76) – (76)^2 = 11.522 – 5.776$

$= 5.776$

b. Fungsi obyektif $TR = 1520\text{-}Q^2$

Laba, $\pi = TR – TC = (1520 – 0) – (250 + 20 + 40) = 750$

Karena perusahaan mengharapkan laba $\pi = 750$, maka fungsi kendalanya adalah $\lambda[(152Q – Q^2) – (250 + 2Q + 4Q^2) – 750]$.

Dengan demikian fungsi Lagrangenya menjadi:

$L = TR + A\ (152Q – Q^2) – (250 + 2Q + 4Q^2) – 750]$

$= (152Q – Q^2) + ((152Q – Q^2) – (250 + 2Q + 4Q^2) – 750]$

$= (152Q - Q) + (-5Q^2 + 150Q – 1.000)$

$L_O = (152 – 2Q) + \lambda\ [-10Q + 15Q] = 0$

$L_\lambda = -5Q^2 + 150Q – 1000 = 0 \rightarrow Q^2 – 30Q – 200 = 0$

$\rightarrow (Q – 20)(Q – 10) = 0$

$\rightarrow (Q_1 – 20$ dan $Q_2 = 10$

Pada $Q_1 = 20$ unit, $\rightarrow TR_1 = 152(20) – (20)^2 = 2.640$

Pada $Q_2 = 10$ unit, $\rightarrow TR_2 = 152(10) – (10)^2 = 1.420$ (tidak dipakai karena $TR_1 > TR_2$)

Untuk $Q = 20$ unit, maka $P = 152 – (20) = 132$

Contoh 32. Seorang produsen melakukan diskriminasi antara pasar dalam negeri dan pasar luar negeri suatu produk dimana permintaan masing-masing produk adalah P, $85 - Q_1$ dan $P_2 = 65 - Q_2$. Sedangkan biaya totalnya adalah TC = 15Q + 300, di mana $Q = Q_1 + Q_2$.

a. Berapa harga yang akan dikenakan produsen untuk memaksimumkan laba dengan melakukan diskriminasi di antara pasar.
b. Tanpa melakukan diskriminasi
c. Bandingkan laba yang diperoleh antara (a) dan (b).

a. Pada pasar diskriminasi $P_1 \neq P_2$

$P_1 = 85 - Q_1 \rightarrow TR_1 = 85Q_1 - Q_1^2$

$P_2 = 65 - Q_2 \rightarrow TR_2 = 65Q_2 - Q_2{}^{2]}$ $TR = TR_1 + TR_2$

Laba $\pi = TR - TC = [(85Q_1 - Q_1^2) + (65Q_2 - Q_2^2)] - [15(Q_1 + Q_2) + 300]$

$= -Q_1^2 + 70Q_1 - Q_2^2 + 50Q_1 - 300$

Syarat fungsi mencapai ekstrim maksimum/minimum:

$\delta\pi/\delta Q_1 = -2Q_1 + 70 = 0 \rightarrow$ diperoleh $Q_1 = 70/2 = 35$ unit

$\delta\pi/\delta Q_2 = -2Q_2 + 50 = 0 \rightarrow$ diperoleh $Q_2 = 50/2 = 25$ unit

Untuk $Q_1 = 35$, $P_1 = 85 - 35 = 50$

Untuk $Q_2 = 25$, $P_2 = 65 - 25 = 40$

b. Pada pasar tidak ada diskriminasi $P_1 = P_2$:

$(85 - Q) = (65 - Q_2) \rightarrow Q - Q - 20$

Dengan mengambil bentuk $Q_1 - Q_2 = 20$ sebagai fungsi kendala, maka:

Fungsi Lagrange: $L = (-Q^1 + 70Q_1 = Q_2^2 + 50Q_2 - 300) + \lambda\,(Q_1 - Q_2 - 20)$

$L_{Q1} = -2Q_1 + 70 + \lambda = 0 \quad \rightarrow 20 + \lambda = -70$

$L_{Q2} = -2Q_2 + 50 - 2 - 0 \quad \rightarrow 20 - \lambda = -50$

$L_1 = Q_1 - Q_2 - 20 = 0 \quad \rightarrow Q_1 - Q = 20$

Penyelesaian simultan diperoleh $Q_1 = 40$ $Q_2 = 20$ dan $\lambda = 10$.

Untuk $Q_1 = 40$, $P_1 = 85 - 40 = 45$

Untuk $Q_2 = 20$, $P_2 = 65 - 20 = 45$

$Q = Q_1 + Q_2 = 40 + 20 = 60$

9.11 OPTIMISASI BERKENDALA FUNGSI PRODUKSI

Kegiatan produksi suatu usaha pada hakekatnya dilakukan karena adanya fungsi permintaan dari masyarakat. Fungsi permintaan ini biasanya direfleksikan oleh beberapa parameter seperti kebutuhan atau pilihan-pilihan konsumen atas barang dan jasa. Untuk memenuhi tuntutan semacam ini, perusahaan akan melakukan kegiatan produksi dengan menggunakan berbagai input untuk memperoleh kombinasi yang optimal agar didapat biaya minimal dan mi ditunjukkan dalam suatu fungsi produksi.

Jika jumlah output produksi dinotasikan sebagai P dan input-input yang digunakan untuk proses produksi Q, maka fungsi produksi dapat ditulis dalam hubungan $P = f(Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_n)$. Namun demikian, sebagai penyederhanaan, selanjutnya fungsi produksi dapat dinya takan dalam bentuk yang lebih umum yaitu:

$$Q = f(K.L) \qquad 9 – 19$$

dengan: Q = output produksi dalam satuan waktu tertentu.

K dan L masing-masing merupakan modal dan tenaga kerja yang dipakai dalam proses produksi.

Turunan parsial pertama dari fungsi produksi ini tidak lain adalah produksi marginal berkenaan dengan input-input produksinya, yaitu:

$$\frac{\delta Q}{\delta K} = MP_K \qquad 9 - 20$$

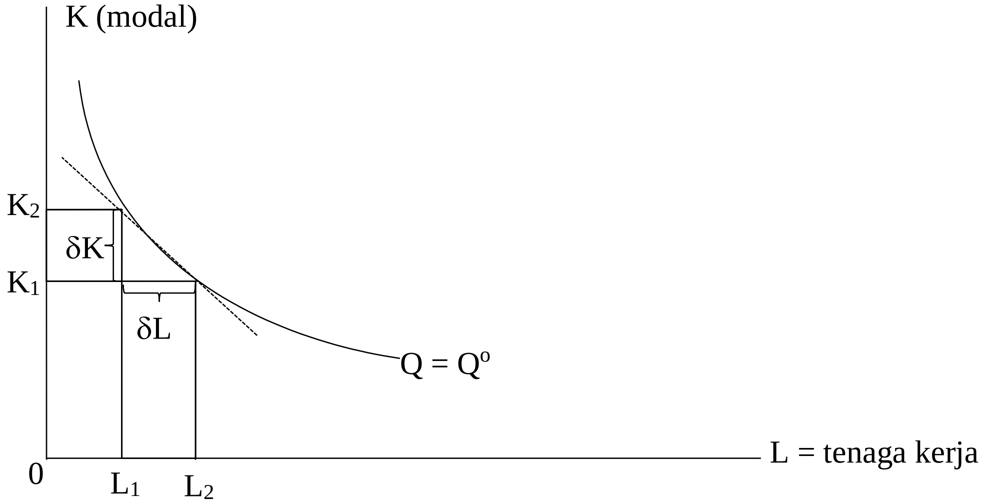
Jika output produksi mempunyai nilai tertentu Q^2, fungsi produksi Q = f(K.L) merupakan suatu persamaan isokuan yang berupa suatu kurva yang menunjukkan berbagai kombinasi penggunaan faktor-faktor input K (modal) dan L (tenaga kerja) yang menghasilkan output dalam jumlah yang sama. Dengan demikian setiap kombinasi input-input produksi terletak sepanjang kurva isokuan. Isokuan ini mempunyai beberapa sifat yang umum, yaitu:

1. Isokuan mempunyai slope atau kemiringan yang negatif.
2. Pergeseran isokuan dari kiri atas ke kanan bawah menunjukkan pertambahan output produksi yang lebih baik.
3. Isokuan selalu berbentuk convex.
4. Kurva isokuan tidak berpotongan satu sama lain.

Sebagaimana yang telah dijelaskan di atas bahwa di dalam kurva isokuan ditunjukkan berbagai kombinasi input-input produk yang cukup untuk memproduksi sejumlah output. Untuk diperlukan sejumlah biaya (budget) untuk membeli berbagai input produksi yang diperlukan yaitu:

$$C = P_K\, K + P_L\, L \qquad 9 – 21$$

dengan: C = jumlah biaya,

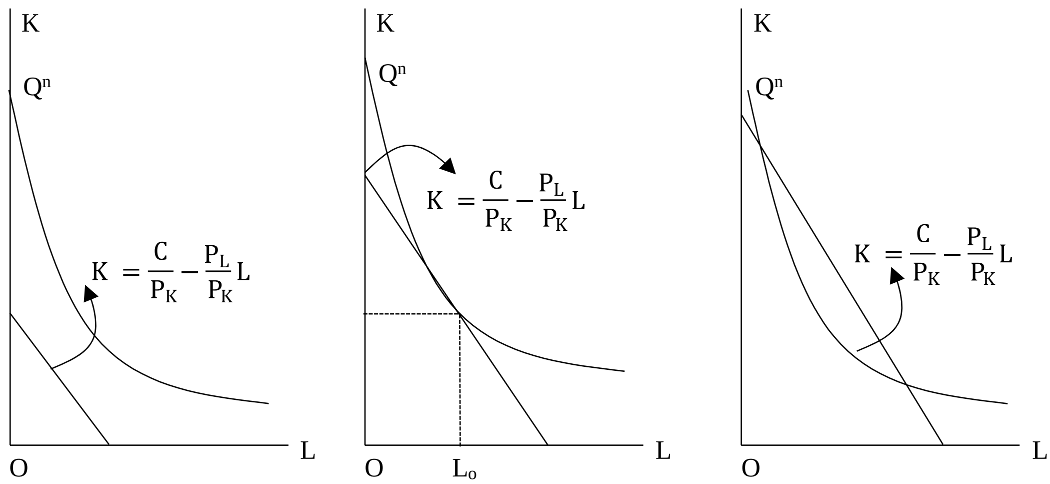


Gambar 9.2. Kurva Isokuan Fungsi Produksi

P_k dan P_L masing-masing merupakan harga dari modal dan tenaga kerja. Untuk C yang konstan, persamaan 9-21 dapat dirubah dalam bentuk slope interceptnya yaitu sebuah garis lurus (dalam pengertian isocost)

$$K = \frac{C}{P_K} - \frac{P_L}{P_K} L \qquad 9-21$$

Isocost yaitu suatu garis yang menggambarkan suatu kombinasi input yang dapat dibeli dengan sejumlah uang tertentu. Tingkat kombinasi input yang optimum dapat dicapai dimana kara ikan akan bersinggungan dengan garis isocost. Pada titik singgung in slope dari kurva isokuan sama dengan slope garis isocost (Gambar 9.3)



Gambar 9.3. Tiga Situasi pada Kombinasi Kurva Isokuan dan Isocost

Tingkat kombinasi input-input produksi yang berhubungan garis isocost dapat dicari dengan metode Lagrange.

1. Fungsi produksi yang akan dioptimumkan: $Q = f(K.L.)$
2. Fungsi kendala yang dihadapai $C = P_K K + P_L L$
3. Fungsi Lagrange diberikan:

   $Q(K.L) = f(K.L) + \lambda (PK + PL – C)$

   Syarat agar Q(K.L) maksimum haruslah:

   $$\frac{\delta Q(K.L)}{\delta K} = f_K(K.L) + \lambda P_K = 0 \text{ .... } 1)$$

   $$\frac{\delta Q(K.L)}{\delta L} = f_L(K.L) + \lambda(P_L = 0 \text{ .... } 2)$$

   $f_K(K.L)$ tidak lain adalah produk marginal: $MP_K = \frac{\delta Q}{\delta K} \text{.........} 3)$

   $f_L(K.L)$ tidak lain adalah produk marginal: $MP_L = \frac{\delta Q}{\delta L} \text{..........} 4)$

Dengan mengkombinasi persamaan (1), (2), (3) dan (4) serta mengatur kembali beberapa parameter, maka syarat keseimbangan produksi dapat dinyatakan dalam hubungan:

$$\frac{MP_K}{P_K} = \frac{MP_L}{P_L} \qquad 9-23$$

Persamaan di atas dapat diekpresikan bahwa kombinasi input-input produksi dengan biaya yang terendah akan mencapai tingkat yang paling optimum manakala rasio marginal produk dan input-input produksi akan sama dengan rasio harga input-input tersebut.

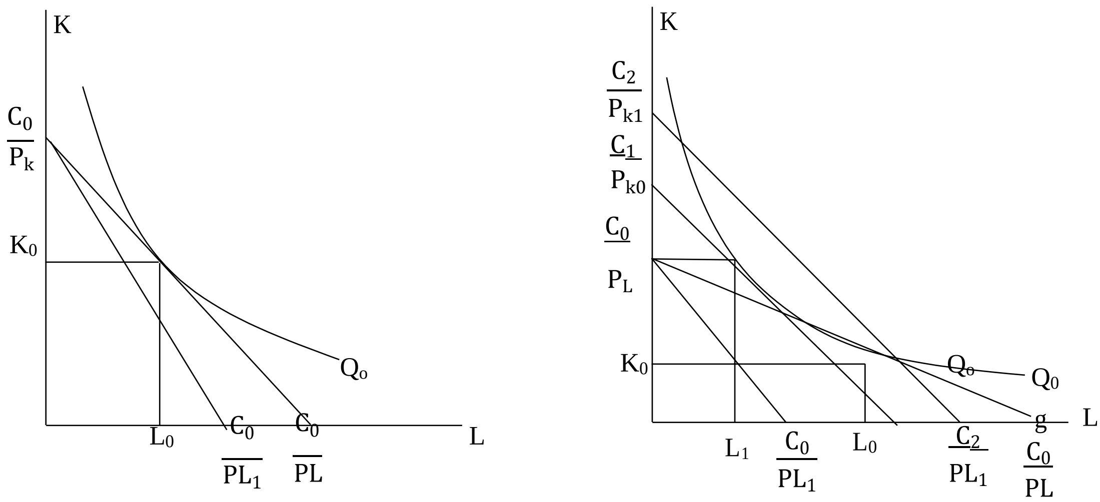
9.11.1 Perubahan Harga Faktor Produksi

Adakala terjadi perubahan harga masing-masing input-input produksi sehingga kondisi ini akan mempengaruhi kombinasi keseimbangan input-input yang selanjutnya akan mempengaruhi tingkat output produksinya. Jika pada input tenaga kerja dalam hal ini upah buruh naik dari P_{L0} ke P_{L1}.

$$\frac{MP_{L_0}}{P_{L_0}} = \frac{MP_{K_0}}{P_{K_0}} \text{ berubah menjadi } \frac{MP_{L_0}}{P_{L_1}} \geq \frac{MP_{K_0}}{P_{K_0}}$$

Adanya peningkatan upah dari P_{L0} ke P_{L1}, akan menyebabkan pengurangan tenaga kerja dari L_0 ke L_1. Berbarengan dengan itu, terjadi pula kenaikan penggunaan modal dari K_0 ke K_1 dalam memproduksi sebesar Q^0.

Untuk mempertahankan tingkat output di sepanjang kurva isokuan Q^0 tidak mungkin dipenuhi dengan garis isocost AB. Karena itu perlu dikeluarkan sejumlah anggaran yang cukup cukup untuk memproduksi output pada tingkat Q^0. Penyelesaiannya yaitu dengan menarik menarik garis sejajar dengan isocost AB sehingga menyinggung kurva isokuan Q^0. Pada titik inilah kombinasi input-input yang baru akan tercapai (Gambar 9.4).



(b) Kenaikan Upah pada Biaya Konstan

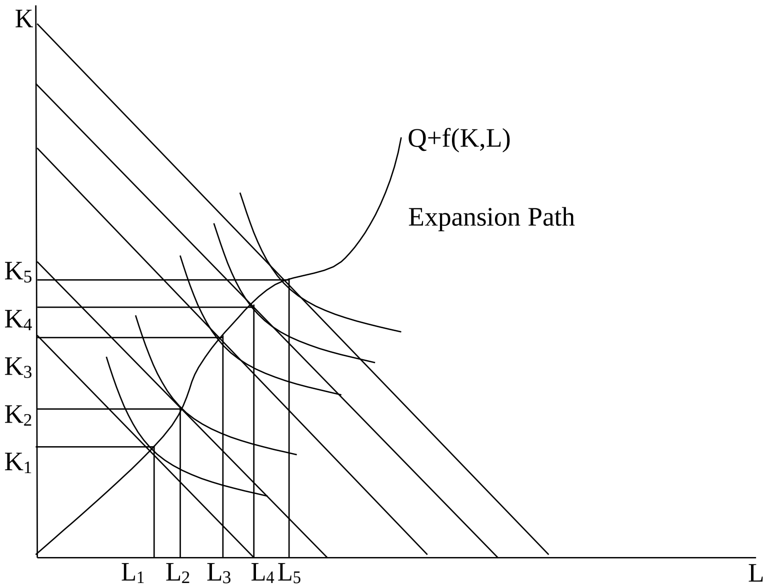
(a) Kenaikan upah akan Menurunkan Penggunaan Tenaga Kerja dan Kenaikan Modal

Gambar 9.4

9.11.2 Jalan Perluasan Usaha

Dari uraian di muka telah diterangkan bahwa biaya minimum akan tercapai bila suatu garis linear isocost menyinggung kurva isokuan pada satu titik. Titik inilah yang disebut titik optimum. Titik optimum ini tercapai artinya garis isokuan yang menyinggung isokuan merupakan derivatif pertama.

Jika perusahaan ingin memilih pengembangan ouput produksi dalam usahanya, maka perlu melakukan penggeseran titik kombinasi yang optimum dari isokuan ke isokuan yang lainnya. Hal ini dapat dilakukan dengan asumsi bahwa dari input tersebut adalah konstan. Garis yang memuat titik-titik kombinasi input yang optimum dari setiap kurva isokuan tersebut merupakan daerah edar perluasan usaha (*expansion path*). Jadi expansion path merupakan tempat kedudukan titik-titik yang optimum pada masing-masing isokuan (Gambar 9.5).



Gambar 9.5. Garis Edar Expansion Path

Contoh 33. Sebuah fungsi produksi ditunjukkan oleh persamaan Q = 10KL. Jika seorang produsen mencadangkan dana 100 untuk membeli input K dan input L di mana harga masing-masing input K adalah 5 dan input L adalah 4. Berapa unit masing-masing input yang digunakan agar produksinya mencapai optimum.

Cara Pertama

a. Fungsi produksi, Q = 10KL

   Garis isocost yang menjadi kendala, $C = P_K K + P_L L$.

$$100 = 5K + 4L$$

   $Q(KL) = 10KL + \lambda\ (5K + 4L - 100)$

$$\frac{\delta Q(K,L)}{\delta K} = 10KL + \lambda(K + 4L - 100)$$

$$\frac{\delta Q(K,L)}{\delta L} = 10L + 5\lambda = 0 \qquad \rightarrow \lambda = (10L/5)$$

$$5K = 4L \rightarrow K = 4L/5$$

$$\frac{\delta Q(K,L)}{\delta L} = 10K + 4\lambda = 0 \qquad \rightarrow \lambda = (10L/4)$$

$$\frac{\delta Q(K,L)}{\delta K} = 5K + 4L - 100 = 0 \rightarrow 5K + 4L = 100 \text{..........1)}$$

Dengan mensubstitusikan $K = 4L/5$ pada persamaan (1) diperoleh:

$5(4l/5) + 4l = 100 \rightarrow 4L + 4L = 100$

$$\delta L = 100 \rightarrow L = 12{,}5$$

Pada l = 12.5 unit, maka K= 4(12,5)/5 = 10 unit

b. Tingkat output produksi, Q = 10KL = 10(10)(12,5) = 1.250

Jadi, dengan kombinasi K 10 unit dan L. 12,5 unit, produksi akan mencapai optimum yaitu Q = 1.250.

Cara Kedua

Syarat kombinasi: $\dfrac{MP_K}{P_K} = \dfrac{MP_L}{P_L}$ .... 1)

Fungsi produksi Q = 10KL $\rightarrow MP_K = 10L$ pada $P_K = 5$

$\rightarrow MP_L = 10K$ pada $P_L = 4$

sehingga rasio $\dfrac{10L}{5} = \dfrac{10K}{4} \rightarrow 50K = 40L$ atau $K = 4L/5$

Contoh 34. (a) Kombinasi barang x dan y yang bagaimana yang harus diproduksi oleh perusahaan untuk meminimumkan biaya apabila fungsi biaya tersebut $C = x^2 + xy + y + 10$ dan perusahaan tersebut mempunyai kouta produksi x + y = 10 dan (b). Bagaimana pengaruh terhadap biaya jika kouta produksi dikurangi satu unit.

a. Fungsi biaya, $C = x^2 + xy + y^2 + 10$

Kouta produksi yang menjadi kendala, 10 = x + y

Fungsi Lagrange $C = x^2 + xy + y^2 + 10 + \lambda (x + y – 10)$

$$\left.\begin{array}{l} C_x = 2x + y + \lambda = 0 \\ C_y = x + 2y + \lambda = 0 \end{array}\right] x = y$$

$C_\lambda = x + y – 10 = 0$

diperoleh (y) + y = 10 $\rightarrow$ y = 10/2 = 5 $\rightarrow$ y = x = 5 unit dan $\lambda = 15$

b. Dengan λ negatif, maka penurunan kouta produksi akan mengurangi biaya kira-kira 15

Contoh 35. Diketahui fungsi produksi ditunjukkan oleh persamaan $Q = 100K^{0,5} L^{0,5}$. Jika cadangan dana 1.000 untuk membel imput K dan input di mana harga masing-masing input $P_K = 10$ dan harga imput $P_L = 25$. Berapa unit masing-masing input yang digunakan agar produksinya mencapai optimum dan berapa unit output produksinya.

a. Fungsi obyektif $Q = 100K^{0,5}L^{0,5}$

   Fungsi kendala $C = P_K K + P_L L = 10K + 25L$

   Fungsi Lagrange $Q = 100K^{0,5} L^{0,5} + \lambda(10K + 25L - 1000)$

   $Q_K = 50K^{0,5}L^{0,5} + \lambda\ 10 = 0 \rightarrow \lambda = -5K^{0,5}L^{0,5}$

   $Q_L = 50K^{0,5}L^{-0,5} + \lambda\ 25 = 0 \rightarrow \lambda = -2K^{0,5}L^{0,5}$

   $Q = 10K + 25L - 1000 = 0$

   Dengan menyamakan kedua, maka $-5K^{0,5}L^{0,5} = -2K^{0,5}L^{0,5}$

   Dengan mengalikan kedua ruas dengan $-K^{0,5}L^{0,5}$ diperoleh $5L = 2K$

   Selanjutnya mensubstitusikan $L = 2K/5$ ke dalam anggaran menjadi.

   $10K + 25(2K/5) = 1000 - 10K + 10K = 1000$

   $20K = 1000 \rightarrow K = 50$

   Pada K= 50 unit, L= 2(50)/5 20 unit.

b. Tingkat output produksi, $Q = 100K^{0,5} L^{0,5} = 100(50)^{0,5} (20)^{0,5}$

   $=100(7,07)(4,47) = 3.162$

   Jadi, dengan kombinasi K = 50 unit dan L = 20 unit, produksi akan mencapai optimum yaitu pada Q = 784,2.

Contoh 36. Diketahui fungsi produksi $Q = 90K^{0,5} L^{0,2}$ dengan kendala $5K + 6L = 210$, carilah output maksimum di bawah kendala tersebut.

a. Fungsi obyektif $Q = 90K^{0,5} L^{0,2}$

   Fungsi kendala $210 = 8K + 4L$

   Fungsi Lagrange $Q = 90K^{-0,5} L^{0,2} + \lambda(5K + 6L - 210)$

   $Q_K = 45K^{-0,5} L^{0,2} + 5\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -9K^{-0,5}L^{0,2}$

   $Q_L = 5K^{-0,5} + 6L - 210 = 0$

   Menyamakan kedua λ $- 9K^{-0,5}L^{0,2} = -3K^{0,5}L^{-0,5}$

   Dengan mengkalikan kedua ruas dengan $-K^{0,5}L^{0,5}$ diperoleh $9L = 3K$

   Selanjutnya mensubstitusikan $K = 3L$ ke dalam anggaran menjadi,

   $5(3L) + 6L = 210 \rightarrow 15L + 6L = 210$

$$21L = 210 \rightarrow L = 10$$

Pada L = 10 unit, K = 3(10) = 30unit

b. Tingkat output produksi $Q = 90K^{0,5}L^{0,2} = 90(30)^{0,5}(10)^{0,2}$

$= 90(5,48)(1,59) = 784,19$

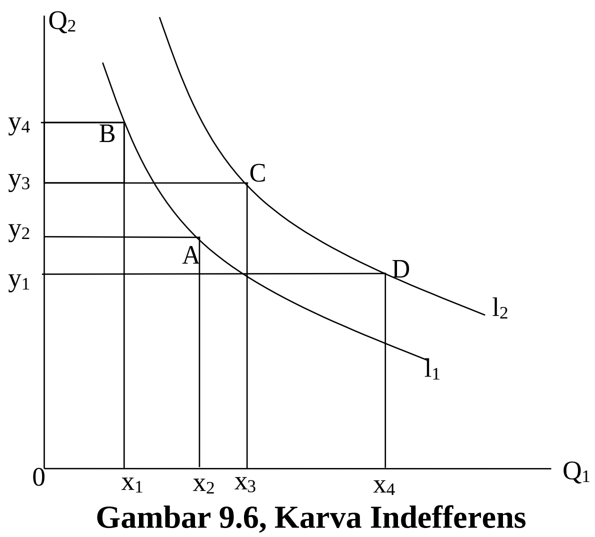
Jadi, dengan kombinasi K30 unit dan L 10 unit, produksi akan mencapai optimum yaitu pada Q = 784,2.

9.12 OPTIMISASI BERKENDALA FUNGSI UTILITAS

Dalam kenyataan sehari-hari perilaku konsumen tidak hanya mengkonsumsi hanya satu macam komoditas, akan tetapi beragai macam komoditas. Dengan kata lain, setiap konsumen bebas menentukan pilihannya akan berbagai komoditas yang disukai. Namun demikian ia sebatas untuk mengkonsumsi pilihan-pilihan tersebut oleh karena pendapatan yang relatif konstan atau daya belinya.

Persoalan selanjumya adalah bagaimana distribusi antara komoditas atau barang yang satu dengan yang lainnya dengan batasan jumlah uang yang dimiliki oleh konsumen tersebut sehingga diperoleh tingkat utilitas (kepuasan) yang maksimal.

Sering juga tingkat utilitas yang dikaitkan dengan kurva indifferensi dirumuskan dalam susunan angka-angka melalui sebuah fungsi utilitas $U = f(Q_1, Q_2, \ldots, Q_3)$. Kurva indefferensi dapat diartikan sebagai suatu kurva yang merupakan penggabungan dari berbagai titik kombinasi dan komoditas-komoditas atau barang yang oleh konsumen dapat dianggap memberikan tingkat utilitas yang sama B (Gambar 9.6).



Gambar 9.6, Karva Indefferens

Titik C akan lebih baik daripada A, karena C mempunyai lebih banyak Q_1 dan Q_2 daripada yang dimiliki A. Pada kurva l_2, titik C dan D mempunyai tingkat utilitas yang sama, C das D menghasilkan utilitas yang lebih banyak dibanding A dan B karena terletak pada kurva indefferensi yang berbeda.

Seperti yang telah dikemukakan di atas, kekuatan konsumen untuk memilih diantara sejumlah komoditas (barang-barang atau jasa) ditentukan oleh tingkat pendapatan. Artinya keseluruhan pembelanjaan pada berbagai macam barang atau jasa tidak dapat melebihi pendapatannya. Kendala ini disebut kendala anggaran belanja konsumsi yang diekspresikan secara matematik yaitu:

$$B = P_1/Q_1 + P_2\,Q_2 \qquad 9\text{-}24$$

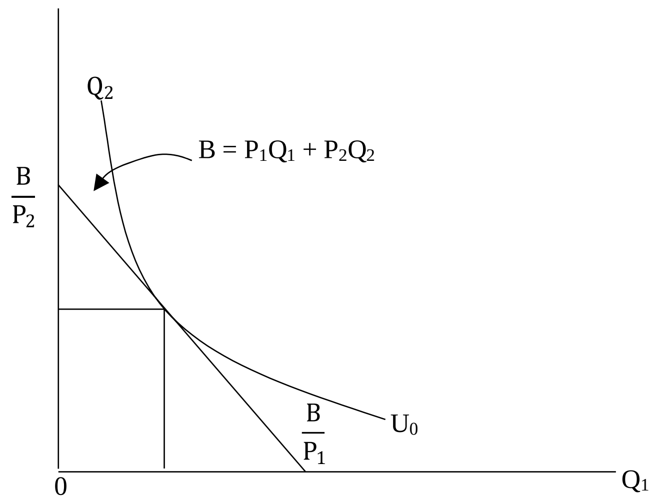
di mana: B = Pendapatan konsumen

Q_1 dan Q_2 Kuantitas masing-masing barang yang dapat dibeli.

P_1 dan P_2 masing-masing harga barang dari Q_1 dan Q_2

Seperti terlihat pada Gambar 9.7, tingkat kombinasi faktor-faktor yang dapat memaksimumkan utilitas dapat dicapai pada saat dimana kurva indefferensi bersinggungan dengan garis anggaran belanja. Pada titik singgung ini slope dari kurva indefferensi sama dengan slope garis angaran belanja.

Tingkat kombinasi utilitas maksimum yang berkaitan jumlah anggaran pendapatan konsumen dapat juga dicari dengan metode Lagrange.



Gambar 9.7 Hubungan Kurva Indefferensi dan Garis Anggaran Belanja

1. Fungsi pengujian yang akan dioptimalkan: $U = f(Q_1, Q_2)$
2. Fungsi kendala yang dihadapi $B = P_1Q_1 + P_2Q_2$

3. Fungsi lagrange: $U(Q_1,Q_2) = f(Q_1, Q_2) + \lambda\ (P_1Q_1 + P_2Q_2 - B)$

   Syarat agar $U(Q_1, Q_2)$ maksimum haruslah :

$$\frac{\delta U(Q_1.Q_2)}{\delta Q_1} = U_1(Q_1Q_2) + \lambda P_1 \ \ldots\ldots.1)$$

$$\frac{\delta U(Q_1.Q_2)}{\delta Q_2} = U_2(Q_2Q_1) + \lambda P_2 \ \ldots\ldots.2)$$

$$U_1(Q_1, Q_2) \text{tidak lain adalah produk marginal}, MU_1 = \frac{\delta U}{\delta Q_1} \ldots\ldots.3)$$

$$U_2(Q_1, Q_2) \text{tidak lain adalah produk marginal}, MU_2 = \frac{\delta U}{\delta Q_2} \ldots\ldots.4)$$

   Dengan mengkombinasi persamaan-persamaan diatas serta mengatur kembali beberapa parameter, maka syarat keseimbangan utilitas dapat dinyatakan dalam hubungan:

$$\frac{MU_1}{P_1} = \frac{MU_2}{P_2} \qquad 9-2$$

Dalam rumusan lain dapat dinyatakan bahwa keseimbangan konsumsi paling optimum akan tercapai manakala rasio marginal masing-masing barang akan sama dengan rasio harga masing-masing barang tersebut.

Contoh 37. Tingkat kepuasan seseorang dalam mengkonsumsi dicerminkan oleh persamaan $U = Q_1Q_2$. Jika pendapatan konsumen sebesar 280, harga masing-masing barang Q_1 sebesar 20 per unit dan barang Q_2 sebesar 10 unit.

a. Berapa unit masing-masing barang yang dikonsumsi agar kepuasannya mencapai optimum.
b. Berapa total utilitasnya.
c. Jelaskan apakah dengan mengkonsumsi 20 unit Q. dan 30 unit Q_2 kepuasan konsumen akan maksimum?
d. Bagaimana pengaruh terhadap tingkat utilitas jika anggaran dinaikkan satu unit.

Cara Pertama

a. Fungsi utilitas, $U = Q_1\ Q_2$:

$$280 = 20Q_1 + 10Q_2$$

$U(Q_1Q_2) = Q_1Q_2 + \lambda\ (20Q_1 + 10Q_1 + 280)$

$$\frac{\delta U(Q_1Q_2)}{\delta Q_1} = Q_2 + 20\lambda = 01$$

$$Q_2/20 = Q/10 \rightarrow Q_2 = 2Q_1$$

$$\frac{\delta U(Q_1Q_2)}{\delta Q_1} = Q_1 + 10\lambda = 0$$

$$\frac{\delta U(Q_1Q_2)}{\delta \lambda} = 20Q_1 + 10Q_2 - 280 = 0 \ldots \ldots .1)$$

Dengan mensubstitusikan $Q_2 = 2Q_1$ pada persamaan (1) diperoleh:

$20Q_1 + 10(2Q_1) = 280 – 20Q_1 + 20Q_1 = 280$

$40Q_1 = 280 \rightarrow Q_1 = 7$

Pada $Q_1 = 7$ unit, $\rightarrow 280 = 20(7) + 10Q_2 \rightarrow Q_2 = 14$ unit dan $\lambda = -0.7$

b. Tingkat output utilitas, $U = Q_1\ Q_2 = (7)(14) = 98$

Jadi, dengan kombinasi $Q_1 = 7$ unit dan $Q_2 = 14$ unit, kepuasan akan mencapai optimum yaitu $U = 98$.

Cara Kedua

Syarat kombinasi: $\frac{MU_1}{P_1} = \frac{MU_2}{P_2}$

Fungsi utilitas $U = Q_1\ Q_2 \rightarrow MU_1 = Q_2$ pada $P_1 = 20$

$\rightarrow MU_2 = Q_1$ pada $P_2 = 10$

sehingga rasio $\frac{Q_2}{20} = \frac{Q_1}{10} \rightarrow 10Q_2 = 20Q_1$ atau $Q_2 = 2Q_1$

c. Jika $Q_1 = 20$ unit dan $Q_2 = 30$ unit

$$MU_1 = Q_2 = 30 \rightarrow \frac{MU_1}{F_1} = 30/20 = 1,51$$

$$MU_2 = Q_1 = 20 \rightarrow \frac{MU_2}{P_2} = 20/10 = 2$$

$$\frac{MU_1}{P_1} \neq \frac{MU_2}{P_2}$$

Jadi, kombinasi konsumsi pada $Q_1 = 20$ unit dan $Q_2 = 30$ unit tidak memberikan kepuasan maksium dan tidak terjadi keseimbangan konsumsi.

d. Dengan λ negatif, maka kenaikan anggaran pendapatan satu rupiah akan menaikkan pendayagunaan kira-kira 0.7.

Contoh 38, (a) Makmumkan pendayagunaan utilitas $U = Q_1Q_2$ yang terikat pada $P_1 = 5$. $P_2 = 20$ dan $B = 600$. (b). Pengaruh terhadap utilitas jika anggaran dinaikkan satu unit dan (c). Total utilitas maksimumnya.

a. Fungi Lagrange, $U = Q_1\ Q_2 + \lambda\ (5Q_1 + 20Q_2 - 600)$

$U_1 = Q_2 + 5\lambda = 0$

$U_2 = Q_1 + 20\lambda = 0$

$U_\lambda = 5Q_1 + 20Q_1 – 600 = 0$

Diperoleh $Q_1 = 20Q_2/5 \rightarrow 5(20Q_2/5) + 20Q_2 = 600$

$20Q_2 + 20Q_2 = 600$

$40Q_2 = 600 \rightarrow Q_2 = 15$ unit

Pads $Q_2 = 15$ unt $\rightarrow Q_1 = 20(15)/5 – 60$ unit dan $\lambda = -3$

b. Dengan λ negatif, maka kenaikan anggaran pendapatan satu rupiah akan menaikkan pendayagunaan kira-kira 3.

c. Tingkat output utilitas, $U = Q_1\ Q_2 = (60)(15) = 900$.

Jadi, dengan kombinasi $Q_1 = 60$ unit dan $Q_2 = 15$ unit, kepuasan akan mencapai optimum yaitu $U = 900$.

Contoh 39. Diketahui fungsi utilitas $U = 10X^{0,4}Y^{-0,8}$ dengan kendala $4X + 8Y = 120$, carilah output maksimum dibawah kendala tersebut.

a. Fungsi alitas $U = 10X^{-0,4}Y^{0,8}$

Fungsi kendala $120 = 4X + 8Y$

Fungi Lagrange $U = 10X^{0,4}\ Y^{0,8} + \lambda\ (4X + 8Y – 120)$

$U_x = 4X^{-0,6}y^{0,8} + 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -X^{-0,6}\ Y^{0,8}$

$U_y = 8X^{-0,4}y^{0,2} + 8\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -X^{-0,4}\ Y^{0,2}$

$U_\lambda = (P_xX + P_yY – 120) = 0$

Dengan menyamakan kedua λ, $-X^{-0,6}Y^{-0,8} = -X^{0,4}Y^{-0,2}$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan $X^{-0,6}Y^{-0,2}$ diperoleh: $X = Y$

Pada $X = Y \rightarrow 120 = 4X + 8(X) = 12X$ diperoleh $X = Y = 10$

b. Tingkat output utilitas, $U = 10\ X^{-0,46}Y^{-0,8} = 10(10)^{0,4}\ (10)^{0,8}$

$= 10(2,51)(6,31) = 158,4$

Contoh 40 Bulan dengan menggunakan contoh -39, bahwa pada titik maksimum utilitas berkendala, rasio harga sama dengan rasio utilitas marginalnya.

a. Fungsi utilitas, $U = 10X^{0,4}Y^{0,8}$

   Marginal berkenaan dengan X, $MU_X = 4X^{-0,6}Y^{0,8}$……1)

   Marginal berkenaan dengan Y, $MU_Y = 8X^{0,4}Y^{0,2}$……2)

b. Fungsi Lagrange, $U = 10X^{0,4}\,Y^{0,8} + \lambda(P_x\,X + P_y\,Y - 120)$

   $U_2 = 4X^{-0,6}Y^{0,8} + P_x\,\lambda = 0$ ….. 3)

   $U_2 = 4X^{-0,6}Y^{0,2} + P_y\,\lambda = 0$ ….. 4)

   dari 1) dan 3) diperoleh:

   $$\lambda = \frac{-4X^{-0,6}Y^{-0,8}}{P_X} = \frac{MU_X}{P_X}$$

   dari 2) dan 4) diperoleh:

   $$\lambda = \frac{-8X^{-0,4}Y^{-0,2}}{P_y} = \frac{MU_y}{P_y}$$

   Jadi, $\dfrac{-MU_X}{P_X} = \dfrac{-MU_y}{P_y}$ atau $\dfrac{MU_X}{P_X} = \dfrac{MU_y}{P_y}$ terbukti!

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Carilah turunan parsial fungsi-fungsi berikut:
   a. $f(x,y) = 7x^2 - 3xy^2 + 2y$
   b. $f(x,y) = 2x^2 + xy^2$
   c. $f(x,y) = \sqrt{x} + 3x\sqrt{y} - y^2$
   d. $f(x,y) = x\sqrt{y} - y\sqrt{x}$
   e. $f(x,y) = x^2y - x^2y - y\sqrt{x}$
   f. $f(x,y) = (2x^2 + 1)/\sqrt{xy}$
   g. $f(x,y) = (\sqrt{x} + y) - 5xy^2$
   h. $f(x,y) = (x\sqrt{y} - y\sqrt{x})/x$

2. Carilah turunan parsial fungsi-fungsi berikut:
   a. $u = x^2 - x + xy + 2y^2 - y + yz + z^2 - 2z + 9xz$
   b. $u = 6x^2 + 4x - 2xy + y^2 + 3y + 8yz - 3z^2 + 3z - 3xz$
   c. $u = x^2 - 3x + xy + 7y^2 + 5y + 6yz + z^2 + z + xz$

3. Carilah turunan parsial pertama, kedua maupun parsial-parsial silang untuk fungsi berikut:
   a. $u = x - x^2y^2 - xy + y$
   b. $u = 2x - x^2y^2 - xy + 2y$
   c. $u = 3x + 5x^2y^2 - 8xy + 3y$

4. Carilah diferensial total dari funger berkerikut:
   a. $u = x^2 + 10yx + 8y$
   b. $u = 5x^2 – 4yx + y$
   c. $u = x^2 + 6yx + 6y$
   d. $u = 6x^2 + yx – 7y$
   e. $u = x^2 + 5x + xy + y^2 + 5y – yz + z^2 – 6z – xz$
   f. $u = 2x^2 – x + xy – 4y^2 + y + yz + 5z^2 + z – xz$
5. Carilah diferensial total turunan kedua dari fungsi berikut:
   a. $u = x^2 – 5yx + y^2$
   b. $u = x^2 + 3yx + 18y^2$
   c. $u = x^2 – yx – y^2$
   d. $u = x^2 – y^2$
   e. $u = 2x^2 – yx – 2y^2$
6. Carilah turunan total du/dx ; du/dy dan du/dt apabila diketahui:
   a. $u = f(x,y) = 2x^2 – 8y$ di mana $y = 2(x+1)$
   b. $u = f(x,y) = 3x^2 + 5y$ di mana $y = 2x$
   c. $u = f(x,y) = 4x^2 – 16y$ di mana $y = \sqrt{x}$
   d. $u = f(x,y) = 2x^2 – 2y^2$ di mana $x = 3t$ dan $y = \sqrt{t}$
   e. $u = f(x,y) = x^2 – y^2$ di mana $x = t^2$ dan $y = \sqrt{(t+1)}$
7. Carilah turunan fungsi-fungsi implisit berikut:
   a. $u = x^2 – 4y^2 = 0$
   b. $u = x – 14y^2 = 0$
   c. $u = x^2 + y^2 – 2xy = 0$
   d. $u = x^2 – y^2 + 3xy = 0$
8. fungsi produksi Cobb-Douglas $Q = 1000K^{0,5}L^{0,5}$. Hitunglah:
   a. Produktivitas marginal modal dan tenaga kerja dan
   b. Tentukan pengaruh dari tambahan satu unit modal dan tenaga kerja terhadap output untuk K 100 dan L – 100
9. Kerjakan kembali soal-8, jika fungsi produksi = $10K^{0,5}L^{0,2}$ untuk K = 100 dan L = 10.
10. Diketahui perekonomian 3 sektor: Y = C + I + G
    dengan, $C = C, + bY_d$ $C_o = 200$, $b = 0.8$

$G = G_o = 500$, $I = I_o = 100$

a. Berapa tingkat keseimbangan pendapatan nasional Y.

b. Tunjukkkan pengaruh terhadap tingkat penghasilan keseimbangan pendapatan nuntuk perubahan satu unit pengeluaran pemerintah.

c. Hitunglah pengaruh terhadap keseimbangan pendapatan jika pemerintah menaikkan pengeluaran sebesar 50.

11. Perekonomian 3 sektor: $Y = C + I + G$

    dengan, $C = C_o + bY_d$ $I_o = 150$ $G_o = 750$

    $T = T_o + tY$ $C_o = 500$ $b = 0,5$ $t = 0,2$ $T_o = 400$

    a. Berapa tingkat keseimbangan pendpatan nasinal Y.

    b. Bagaimana pengaruh perubahan satu unit dalam pengeluaran pemerintah yang diimbangi secara persis oleh perubahan satu unit dalam pajak otonom berpengaruh positif terhadap pendapatan keseimbangan.

12. Soal-11: a) Bagaimana pengaruh terhadap keseimbangan pendapatan jika pajak proporsional dinaikkan 12 persen dan b) Jika pemerintah akan merubah tarif pajak marginal semula sebesar 20% untuk mencapai keseimbangan pendapatan Y = 25.00 berapa persen harus merubah pajak proporsional tersebut.

13. Seorang monopolis menawarkan duajenis barang yang berbeda dari satu produk dengan fungsi permintaan masing-masing $Q_1 = 100 - P_1$ dan $Q_2 = 80 - P_2$ serta fungsi biaya gabungan $TC = Q_1^2 + 0,5Q_1Q_2 + Q_2^2$. Hitunglah harga masing-masing barang untuk memaksimumkan laba.

14. Perusahaan memproduksi dua macam barang dengan biaya $TC = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$. Jika harga jual masing-masing barang $P_1 = 20$ dan $P_2 = 15$. Hitunglah berpa unit masing-masing barang harus diproduksi agar keuntungan maksimum.

15. Perusahaan monopoli memproduksi dua macam barang dengan biaya total $TC = Q_1^2 + 5Q_2^2 - Q_1Q_2 - 10Q_1 - 50Q_2 + 700$. Hitunglah biaya minimal dan periksalah syarat jenjang kedua.

16. Seorang monopolis yang menawarkan $P_1 = 120 - Q_2$ dan $P_2 = 80 - Q_2$. Jika biayaga bungan untuk memproduksi dua jenis barang itu $TC = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$. Berapa unit barang untuk memaksimumkan laba perusahaan.

17. Fungsi produksi $Q = xy$. Jika produsen mencadangkan anggaan 800 untuk membeli input produksi x dan y dengan harga masing-masing unit 5. (a) Hitung masing-

masing input yang harus digunakan agar produksinya mencapai optimum dan (b) Hitunglah (a) jika kendala dinaikkan satu unit menjadi 801.

18. Carilah nilai-nilai kritis yang akan dioptimumkan dari fungsi biaya TC = $2x^2 - xy + y^2$ sesuai dengan fungsi kendala x + y = 55 yang diberikan serta diperkirakan pengaruh perubahan satu unit dalam konstanta kendala terhadap fungsi obyektifitasnya.
19. Fungsi produksi ditunjukkan persamaan Q = 100KL. Seorang produsen mencadangkan dana 500 unit untuk input K dan input di mana harga masing-masing input K adalah 8 dan L adalah 10, beberapa unit masing-masing input yang digunakan agar produksinya mencapai optimum dan berapa unit output produksinya.
20. Kombinasi barang x dan y yang bagaimana yang harus diproduksi oleh perusahaan untuk meminimumkan biaya apabila fungsi biaya tersebut TC = $x^2 + xy + y^2 + 80$ dan perusahaan tersebut mempunyai kouta produksi x + y = 22 dan bagaimana pengaruh terhadap biaya jika kouta produksi dikurangi satu unit.
21. Tingkat utilitas U = $Q_1.Q_2$. Jika pendaptan konsumen sebesar 560, harga masing-masing barang Q_1, sebesar 20 per unit dan barang Q_2 sebesar 40 per unit.
    a. Berapa unit masinng-masing barang yang dikonsumsi agar kepuasannya mencapai optimum.
    b. Berapa total utilitasnya.
    c. Jelaskan apakah dengan mengkonsumsi 25 unit Q_1 dan 20 unit Q_2 kepuasan konsumen akaan maksimum?
22. Maksimumkan pendayagunaan fungsi utilitas U = Q_1Q_2yang terikat pada harga barang yaitu P_1 = 10, P_2 = 40 dan B = 1200. Bagaimana pengaruh terhadap utilitas jika anggaran dinaikkan satu unit dan berapa total utilitas maksimumnya.

BAB X
KALKULUS INTEGRAL

10.1 KONSEP DAN DEFINISI

Dasar-dasar tentang kalkulus integral sudah dikenal lebih dari 2000 tahun yang lalu, ketika orang-orang Yunani Kuno mencoba menaksir dengan apa yang mereka namakan *Method of Exhaustion*. Gagasan ini dapat dijelaskan secara sederhana sebagai berikut: Dalam geometri primitif, luas daerah empat persegi panjang yang merupakan hasil kali antara panjang dan lebarnya, dapat dilukiskan daerah poligon yang luasnya mendekati luas daerah empat persegi panjang itu. Akan tetapi, untuk kasus-kasus kurva linear, misalnya untuk mendapatkan luas suatu daerah diperoleh dengan mengasumsikan sebagai limit biasa dari segi banyak yang dibatasi dan dilukiskan dengan teratur sebagai segi banyak yang jumlah sisi-sisinya diperbesar tak terhingga. Proses ini dilanjutkan terus dengan mengambil daerah poligon yang sisinya makin lama makin banyak. Daerah yang diketahui makin lama makin dicakup oleh daerah poligon. Metode seperti ini pernah dipakai oleh "pujangga" Archimedes (287-212 SM) untuk menentukan luas lingkaran dan beberapa bentuk kurva linear lainnya.

Pada teorema kalkulus dikenal dua macam pengertian integrasi. *Pertama*, integrasi sebagai suatu proses yang merupakan kebalikan (*invers*) dari diferensial atau yang lebih umum dikenal dengan Integral Tak Tentu (*Indefinite Integral*). Pengertian integrasi pada integral tak tentu adalah suatu proses untuk mendapatkan suatu fungsi apabila derivatifnya (laju perubahannya) diketahui.

Kedua, integrasi sebagai suatu metode untuk menentukan luasan di bawah suatu kurva, lebih umum dikenal dengan Integral Tertentu (*Definite Integral*). Integrasi juga dapat didefinisikan sebagai suatu proses untuk mencari nilai limit dari penjumlahan persegi panjang-persegi panjang apabila banyaknya persegi panjang-persegi panjang tersebut bertambah dengan tak terhingga dan nilai tiap persegi panjang mendekati nol.

10.2 INTEGRAL TAK TENTU

Dalam pasal ini dibicarakan hubungan yang sangat erat antara diferensial dan integral. Hubungan antara keduanya kurang lebih sama dengan hubungan antara pengkuadratan dan penarikan akar. Jika kita melakukan integrasi terhadap suatu fungsi f(x) yang kontinu, maka akan diperoleh suatu anti-turunannya yaitu F(x) yang apabila didiferensialkan menghasilkan fungsi f(x).

Jika F(x) adalah hasil integral dari fungsi f(x) terhadap x, maka hubungan antara F(x) dan f(x) dinyatakan:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c \tag{10-1}$$

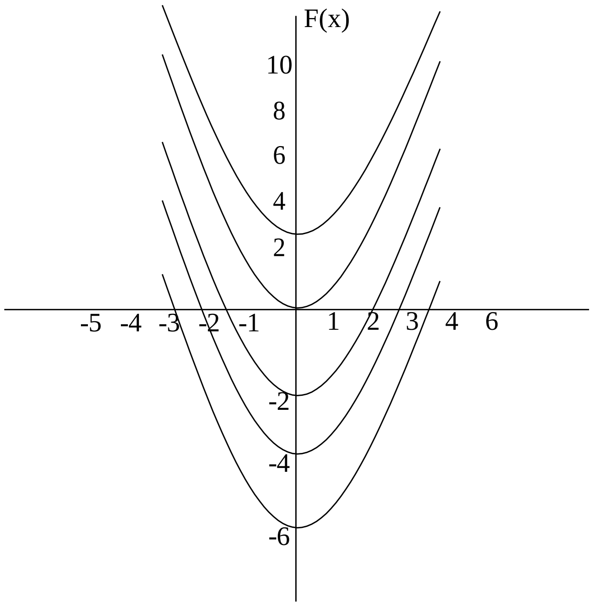
Persamaan diatas dapat dibaca "*integral dari f(x) terhadap x*". Tanda ∫ adalah tanda integral. f(x) adalah integral, F(x) merupakan integral partikular dan C konstanta integral. Sedangkan F(x) + C adalah integral asal atau integral tertentu. Disebut demikian karena sebagai fungsi x yang disini tidak ditentukan secara spesifik dapat mengambil berbagai nilai.

Fungsi F(x) dinamakan primitif (anti-turunan) dari fungsi f(x) jika F(x) = f(x). Kita dapat membentuk primitif dari suatu fungsi kontinu dengan integrasi fungsi f(x). Artinya, setiap rumus penurunan bila dibaca dalam arah terbalik membentuk suatu primitif dari suatu fungsi dan pada gilirannya, primitif ini memberikan rumus integrasi untuk fungsi itu. Oleh karena turunan dari sembarang konstanta C adalah nol, yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{d[F(x)+C]}{dx} &= \frac{dF(x)}{dx} + \frac{dC}{dx}\\ &= \frac{dF(x)}{dx}\\ &= f(x)\end{aligned} \tag{10-2}$$

Dengan proses balik akan kembali menjadi: $\int f(x)\, dx = F(x) + C$

Fungsi F(x) + C mempunyai turunan yang sama yaitu f(x) untuk setiap konstanta C yang mungkin tak terhingga banyaknya. Jadi, jelaslah bahwa F(x) haruslah merupakan anti-turunan (*anti derivatif*) atau integral tak tentu untuk suatu fungsi yang tak terhingga banyaknya yang berbeda satu sama lain yang semata-mata karena suatu konstanta. Jadi konstanta pengintegralan C bertindak mewakili nilai setiap konstanta yang merupakan bagian dari fungsi primitif tetapi dianaktirikan dari turunan oleh kaidah pendiferensialan.



Gambar 10.1

Secara geometri, y = F(x) + C mewakili suatu sekte kurva-kurva dalam pengertian bahwa kemiringan garis singgung pada setiap kurva tersebut di titik x adalah f(x). Setiap kurva dapat diperoleh dengan menggeser kurva y = F(x) melalui pemindahan vertikal sebesar C.

Di bawah ini diberikan daftar tabel primitif integral tak tentu yang banyak dijumpai dalam literatur-literatur kalkulus integral.

Tabel 10.1 Daftar Integran Primitif Integral Titik Tentu

No	Integran	Integral Tak Tentu	Keterangan
1	f(x) = g'(x)	$\int f(x)dx = g(x) + C$	
2	f(x) = g (x) + h (x)	$\int f(x)dx = \int g(x)dx + \int h(x)dx$	
3	f(x) = k.g (x)	$\int f(x)dx = k \int g(x)dx + C$	
4	f(x) = x^2	$\int f(x)dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$n \neq 1$
5	f(x) = 1/x	$\int f(x)dx = \text{In } x + C$	$x \neq 0, x > 0$
		$\int f(x)dx = \text{In}\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0, x < 0$
6	f(x) = e^{ax}	$\int f(x)dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$	$a \neq 0$
7	f(x) = a^{nx}	$\int f(x)dx = \frac{a^{ax}}{n \text{ In } a} + C$	$a > a, \neq 1$
8	x = g(u)	$\int f(x)dx = \int f[g(u)]g'(u)du + C$	

9	U = u(x), v = v(x)	∫u'(x).v(x)dx = u(x).v(x)- ∫u(x),v'(x)dx+C	

Contoh 1. Kerjakan masing-masing integral tak tentu berikut dengan menggunakan kaidah-kaidah pengintegralan seperti tabel di atas. Ceklah jawaban anda dengan membalikkan kaidah aturan pendiferensialnya.

a. $\int 12\ dx = 12x + C$ (Kaidah 1)

b. $\int x^2 dx = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} = x^3 + C$ (Kaidah 4)

c. $\int 15x^4\ dx \quad = 15\int x^4\ dx$ (Kaidah 3)

$= 15\left(\frac{1}{4+1}\right) x^{4+1} = 3x^5 + C$ (Kaidah 4)

d. $\int (4x + 9)\ dx = 2x^2 + 9x + C$ (Kaidah 2,4)

e. $\int 1/x = \text{In}\ |x| + C$ (Kaidah 5)

f. $\int 10^{4x}\ dx = \frac{1}{4} e^{4x} + C$ (Kaidah 7)

g. $\int e^{4x}\ dx = \frac{1}{4} e^{4x} + C$ (Kaidah 6)

10.3 TEKNIK INTEGRASI

Teorema kalkulus integral menyatakan bahwa kita dapat membentuk primitif dari suatu fungsi kontinu dengan jalan integrasi. Dengan kata lain mengubah persoalan integrasi menjadi persoalan mencari primitifnya.

Banyak fungsi-fungsi yang tidak dapat diintegrasikan dengan proses balik terhadap hukum-hukum diferensiasi. Dalam kasus-kasus semacam ini, tersedia sejumlah menu khusus yang dapat dipakai untuk mengintegralkannya. Oleh karena itu, diperkenalkan teknis integrasi yang dapat digunakan pada setiap metode untuk mencari suatu primitif. Istilah ini banyak kita jumpai di berbagai literatur Matematika.

Ada 3 (tiga) teknik integrasi yang akan dipakai dalam buku ini, yaitu: Integrasi dengan Substitusi (*Integration by Substitution*), Integrasi Bagian per Bagian (*Integration by Parts*) dan Integrasi Pecahan Parsial (*Integration by Partial Fractions*).

10.3.1 Integrasi dengan Substitusi

Kita pandang suatu fungsi f(x) yang mempunyai turunan yang kontinu pada interval terbuka. Jika integran f(x) dapat juga dinyatakan sebagai suatu kelipatan konstanta dari fungsi lainnya misalkan u(x) dan turunan du/dx, maka jika kita integrasikan berkenaan dengan x dapat dituliskan sebagai berikut:

$\int f(x)\,dx = \int[u\,du/dx]dx = \int u\,du$

$\int f(x)\,dx = F(u) + C$ 10 – 3

Contoh 2. Tentukan integral berikut ini dengan menggunakan substitusi. Biasakan untuk mengecek jawaban anda.

a. $\int 6x(x^2 +50)^2 dx = ...$

Kita pastikan bahwa integran tersebut dapat dinyatakan sebagai suatu kelipatan konstanta dari u dan du/dx.

Misal: $u = x^2 + 50 \rightarrow du/dx = 2x$ atau $dx = du/2x$

Substitusikan ke integran asal untuk mereduksi menjadi suatu fungsi dari du/dx sehingga:

$$\int 6x(x^2 + 50)^2\,dx \;=\; \int 6x.\,[u^2\,\frac{du}{2x}] = \sqrt{3}u - du$$

$$= u^3 + C$$

Dengan mensubstitusikan harga $u = (x^2 +50)$ diperoleh:

$\int 6x(x^2 +50)^2\,dx = (x^2 + 50)^3 + C$

b. $\int [\frac{du}{2x}]\,dx = ...$

Misalkan $y = (x^2 - 1) \rightarrow dy = 2x\,dx$. Substitusikan ke integran asal untuk mereduksinya menjadi suatu fungsi dari du/dx sehingga:

$$\int \frac{6x}{x^2 - 1}\,dx = \cdots \ldots \ldots ..$$

$$= 3\,\mathrm{In}\,y + C$$

Dengan mensubstitusikan harga $y = x^2 - 1$ diperoleh:

$$\int \frac{6x}{x^2 - 1}\,dx = 3\,\mathrm{In}(x^2 - 1) + C$$

Contoh 3. Hitunglah integral berikut dengan metode substitusi.

a. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$ = ...

Misal: $\sqrt{(a^2+x^2)}$ =1 – x maka $a^2 + x^2 = t^2 - 2tx + x^2$

$t^2 = a^2 + 2tx$

Dengan mengambil turunan parsial: 2t dt = 2x dt + 2t dx

$$dx = \frac{t-x}{t}dt$$

Dengan mensubstitusikan harga $\sqrt{(a^2+x^2)}$ diperoleh:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = \int \frac{(t-x)}{(t-x)t} = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \text{In } |t| + C$$

Dengan mensubstitusikan harga t = x + $\sqrt{(a^2+x^2)}$ diperoleh:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = \text{In} + |\sqrt{(a^2+x^2)}| + C$$

b. $\int 4e^{2x+2}dx$ = ...

Misal: u = 2x + 2 → du/dx = 2 atau dx = ½ du

Substitusi ke integran asal untuk mereduksi menjadi suatu fungsi dari du/dx sehingga:

$$\int 4e^{2x+2}\,dx = \int 4e^u\,(\frac{1}{2}du) = 2\int 4e^u\,du$$

$$= 2e^U + C, \text{ untuk } u = 2x + 2 \text{ maka:}$$

$$\int 4e^{2x+2}\,dx = 2e^{2x+2} + C$$

10.3.2 Integrasi Bagian Per Bagian

Jika suatu integran merupakan hasil kali atau bagi dari fungsi-fungsi yang dapat didiferensialkan dan tidak dapat dinyatakan sebagai suatu kelipatan konstanta seperti cara substitusi, integral bagian per bagian sangat bermanfaat sekali. Cara ini dapat diperoleh dengan proses balik pendiferensialan suatu hasil kali atau bagi.

Kita pandang suatu fungsi f(x) yang merupakan hasil kali dari fungsi-fungsi kontinu u(x) dan v(x) yaitu f(x) = u(x).v(x) yang keduanya dapat diturunkan:

$$\frac{d[u(x).v(x)]}{dx} = u'(x).v(x) + u(x)v'(x)$$

$$u(x).\,v(x) = \frac{d[u(x).\,v(x)]}{dx} - u'(x).\,v(x)$$

$$\int u(x).\,v(x)\,dx = \int \frac{d[u(x).\,v(x)]}{dx} - \int u'(x).\,v(x)dx$$

$$\int u(x).\,v(x)\,dx = u(x).\,v(x)] - \int u'(x).\,v(x)\,dx \qquad 10-4$$

Contoh 4. Hitunglah hasil integrasi dengan menggunakan pengintegralan bagian per bagian untuk integral berikut ini:

a. $\int x^2\, e^2 dx = \ldots\ldots\ldots..$

Dengan memisahkan integran tersebut menjadi dua bagian:

Misal: $u = x^2 \rightarrow u' = 2x$

$v' = e^2 \rightarrow v = e^x$

Substitusikan nilai-nilai tersebut pada rumus 10-4 diperoleh:

$\int x^2\, e^2 dx = \int u.\,dv = uv - \int v.\,du$

$= x^2\,(e^2) - \int 2x\,(e^x)\,dx\ldots\ldots\ldots\ldots{*})$

Ruas kanan suku keaua perlu diintegrasikan lagi. Kita gunakan penggalan untuk integral sisanya.

Misalkan $u = 2x \rightarrow n' = 2$

$v' = e^x \rightarrow v = e'$

$\int 2x\, e^x\, dx = uv - \int v.\,du = 2x\, e^x - \int 2e^x\, dx = 2xe^x - 2e^x \ldots\ldots\ldots\ldots,{**})$

Dengan mensubstitusi **) pada persamaan *) maka hasil integrasinya:

$\int x^2.e^x\, dx = x^2e^x - (2xe^x - 2e^x) = e^x\,(x^x - 2x + 2) + C$

b. $\int \frac{2x}{(x+9)}\, dx = \ldots\ldots\ldots$

Misal: $u = 2x \rightarrow u' = 2$

$v' = 1/(x + 9)^2 \rightarrow v = -1/(x + 9)$

Substitusikan nilai-nilai tersebut pada rumus diperoleh:

$$\int \frac{2x}{(x+9)^2} dx = uv - \int v.\,du = -\frac{2x}{(1+9)} - \int \frac{-2}{(x+9)} dx$$

$$= \frac{-2x}{(x+9)} + 2\,\text{In}(x+9) + C$$

c. $\int \text{In } x\, dx = \ldots\ldots\ldots$ untuk $x > 0$

Misal: $u = \text{In } x \quad \rightarrow u' = (1/x)$

$v' = 1 \quad \rightarrow v = x$

$$\int \text{In } x\, dx = uv - \int v.du = x.\text{In } x - \int x(1/x)dx = x \text{ In } x - \int dx$$

$$= x \text{ In } x - x + C = x\,(1n\, x - 1) + C$$

d. $\int x.\ln x\, dx = \ldots\ldots\ldots.$ untuk $x > 0$

Misal: $u = \text{In } x \quad \rightarrow u' = (1/x)$

$v' = x \quad \rightarrow v = ½\, x^2$

$$\int x.\ln x\, dx = uv - \int v.du = \frac{1}{2}x^2 \text{In } x - \int \frac{1}{2}x^2(1/x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \text{ In } x - \int \frac{1}{2} x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \text{ In } x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

10.3.3 Integral Pecahan Parsial

Jika suatu integran merupakan fungsi rasional, maka dasar untuk menghitung integral fungsi tersebut ialah dengan menguraikan fungsi rasional yang diberikan menjadi jumlah dari pecahan-pecahan yang lebih sederhana yang dapat diintegralkan dengan bantuan teknik-teknik yang sudah dibicarakan pada pasal sebelumnya. Teknik ini dikenal dengan istilah Integral Pecahan Parsial (*Integration by Partial Fractions*).

Di dalam pasal ini dibicarakan suatu teknik untuk menghitung integral fungsi rasional. Seperti kita ketahui, integral fungsi rasional dapat berupa polinomial, fungsi rasional, logaritmik, arc sin atau kombinasi dari fungsi-fungsi tersebut.

Pembahasan mengenai penguraian suatu fungsi rasional menjadi pecahan-pecahan parsial dapat dibagi menjadi beberapa kasus yang bergantung pada cara penguraian penyebutnya menjadi linear atau kwadratik.

KASUS I

Penyebut merupakan hasil kali dari faktor-faktor linear yang semuanya berbeda. Misalkan f = p/q, di mana p, q dua polinomial dengan derajat p < derajat q, dan $q(x) = (X\text{-}X_1)(X\text{-}X_2)(X\text{-}X_3)\;\; (X\text{-}X_n)$.

Kombinasi linear berupa $= \dfrac{A_1}{(X - X_1)} + \dfrac{A_2}{(X - X_2)} + \dfrac{A_3}{(X - X_3)} + \cdots +$

$$\frac{A_n}{(X - X_n)} \qquad 10 - 5$$

Contoh 5. Hitunglah integral berikut:

a. $\int \frac{12}{4-x^2} dx =$ ……….

Dapat diselesaikan dengan menfaktorkan penyebutnya:

$$\frac{12}{4 - x^2} = \frac{12}{(2 - x)(x + 2)} = \frac{A}{(2 - x)} + \frac{B}{(x + 2)}$$

$$= \frac{A(x - 2) + B(2 - x)}{(2 - x)(x + 2)} = \frac{(A - B)x + 2(A + B)}{(2 - x)(x + 2)} \ldots \ldots .*)$$

$$(A - B)x + 2(A + B) = 12 \rightarrow \left[\begin{matrix} A - B - 0 \\ A + B = 6 \end{matrix}\right. \text{ diperoleh } A = 3 \text{ dan } B = 3$$

Dengan mensubstitusikan nilai A dan B pada persamaan 1) diperoleh:

$$\int \frac{12}{4 - x^2} dx = \int \frac{3}{(2 - x)} dx + \int \frac{3}{(x + 2)} dx$$

$= 3 \text{ In } |2 - x| + 3 \text{ In } |x - 2| + C$

b. $\int \frac{4x^2+15x+13}{(x-1)(x+2)(x+3)} dx$

$$\frac{4x^2 + 15x + 13}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)} = \frac{A}{(x + 1)} + \frac{B}{(x + 2)} + \frac{C}{(x + 3)}$$

$$= \frac{(x + 2)(x + 3) + B(x + 1)(x + 3) + C(x + 1)(x + 2)}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$$

$$\left.\begin{matrix} A + B + C = 14 \\ 5A + 4B + 3C = 15 \\ 6A + 3B + 2C = 13 \end{matrix}\right] \text{ Penyelesaian secara simultan menghasilkan } A = 1B = 1\text{dan } C = 2. \text{ Jadi,}$$

$$\int \frac{4x^2 + 15x + 13}{(x - 1)(x + 2)(x + 3)} dx = \int \frac{1}{(x + 1)} dx + \int \frac{1}{(x + 2)} dx + \int \frac{2}{(x + 3)} dx$$

$= \text{In } |x - 1| + \text{In } |x - 2| + \text{In } |x - 3| + C$

KASUS II

Penyebut merupakan hasil kali dari faktor-faktor linear yang semuanya berulang, yaitu:

$q(x) = (x-x_1)^{t1} (x-x_2)^{t2} (x-x_3)^{t3} \ldots. (x-x_n)^{tn}$

Dalam hal ini $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_{It}}{(x-x_1)^{t_1}} + \frac{A_{I2}}{(x-x_I)^{t_1-1}} + \cdots \frac{A_I t_1}{(x-x_I)} +$

$$\frac{A_{2I}}{(x-x_2)^{t_2}} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^{t_2-1}} + \cdots \frac{A_2 t_2}{(x-x_2)} +$$

$$\frac{A_{n1}}{(x-x_n)^{t_n}} + \frac{A_{n2}}{(x-x_n)^{t_n-1}} + \cdots \frac{A_n t_n}{(x-x_n)} \qquad 11-6$$

Contoh 6. Hitunglah integral berikut:

a. $\int \frac{8x^2+11x+8}{(x-1)(x+2)^2} dx$

$$\frac{8x^2+11x+8}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+2)} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{A(x-1)(x+2)^2 + B(x+2)^2 + C(x-1)^2 + D(x-1)^2}{(x+1)^2(x+2)^2}$$

$$= \frac{(A+C)x^3(3A+B+D)x^2 + (4B-3C-2D)x + (-4A+4B+2C+D)}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

$$\left.\begin{array}{r} A+C=0 \\ 3A+B+D=8 \\ 4B-3C-2D=11 \\ -4A+4B+2C+D=8 \end{array}\right] \begin{array}{c} \text{Penyelesaian secara simultan menghasilkan} \\ A=1 \quad B=1 \text{dan } C=2. \text{ Jadi,} \end{array}$$

$$\int \frac{5x^2+11x+8}{(x-1)^2(x+2)^2} dx = \int \frac{1}{(x-1)} dx + \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{(x+2)} dx + \int \frac{2}{(x+2)^2} dx$$

$= \text{In } |x+1| + 3\text{In } |x-1| - \text{In } |x-2| - 2\text{In } |x-2| + C$

KASUS III

Berdasarkan sifat fungsi rasional seperti di atas yaitu setiap fungsi nasional dapat dituliskan sebagai jumlah pecahan berbentuk:

$\frac{A}{(x-a)^n}$ dan $\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}$ maka integral fungsi rasional diubah menjadi masalah memecahkan integral fungsi yang lebih khusus yaitu: $\int \frac{A}{(x-a)^n}$ dx dan $\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}$ dx dengan syarat $b^2 - 4c \geq 0$

Contoh 7. Hitunglah integral berikut ini: $\int \frac{dx}{(4x-a)^n}$

Misalkan 4x + a = t, maka dx = $\frac{1}{4}$ dt, sehingga $\int \frac{dx}{(4x+a)^n} = \int \frac{\frac{1}{4}dx}{t^n}$

Hasil integralnya $\begin{cases} \frac{1}{4} \ln|t| = \frac{1}{4} \ln|4x+a| + C \text{ untuk } n = 1 \\ \frac{\frac{1}{4} t^{1-n}}{1-n} = \frac{(4x+a)^{1-n}}{4(2-n)} \text{ untuk } n \neq 1 \end{cases}$

10.4 INTEGRAL TAK TENTU: FUNGSI EKONOMI

Pendekatan kalkulus integral (tak tentu) dapat juga diterapkan untuk memprakirakan fungsi-fungsi ekonomi seperti: fungsi produksi, fungsi pendapatan, fungsi biaya, fungsi utility dari fungsi-fungsi marginalnya. Karena fungsi marginal merupakan turunan dari fungsi total maka pada proses pengintegralan dapat ditentukan fungsi totalnya.

10.4.1 Pembentukan Modal

Tingkat investasi bersih didefinisikan sebagai tingkat perubahan dalam pembentukan saham modal selama kurun waktu tertentu. Jika pembentukan modal dinotasikan sebagai fungsi K(t) dan investasi bersih I(t), maka tingkat pembentukan modal yang merupakan integral yang berkenaan dengan investasi bersih I(t) terus sepanjang waktu t dapat dinyatakan secara matematis, yaitu:

$$K_t = \int I(t)dt = K(t) + K_0 \qquad 10-7$$

dengan K, adalah saham modal pada saat t = 0.

Contoh 8. Jika diketahui investasi bersih $I = 5t^{2/3}$ dan saham modal pada t = 2 adalah 100. Carilah tingkat modal K_t.

$$K_t = \int I(t)dt = \int 5t^{2/3}\, dt = 3t^{5/3} + K_0$$

Pada t = 2, modal saham K_2 = 100 sehingga,

$K_2 = 3(2)^{5/3} + K_0 = 100 \rightarrow 9{,}52 + K_2 = 100 \rightarrow K_0 = 90{,}48$

Jadi tingkat pembentukan modal adalah $K_t = 3t^{5/3} + 90{,}48$

Contoh 9. Tingkat investasi bersih $I = 15t^{1/2}$ dan saham modal pada t = 2 adalah 250. Carilah tingkat modal K_t.

$K_t = [15t^{1/2}\ dt = 10t^{1.5} + K_0$

Pada t = 2, modal saham $K_2 = 250 \rightarrow 250 = 10(2)^{1.5} + K_0$

sehingga $K_0 = 250 – 10(2)^{1.5} = 250 – 28.28 = 221,72$

Jadi tingkat pembentukan modal adalah $K_t = 10t^{1.5} + 221,72$

10.4.2 Fungsi Produksi

Fungsi produksi total dapat ditentukan dengan melakukan integrasi terhadap fungsi marginal physical product MPP, dimana fungsi produksi dinyatakan sebagai P = f(Q) dan merupakan jumlah input. Marginal produk didefinisikan sebagai output tambahan yang dihasilkan dari adanya penggunaan satu unit tambahan input.

Produksi total : P = f(Q)

Produksi rata-rata : AP = P/Q

Produksi marginal : MP = dP/dQ sehingga, $P = \int MP\ dQ$

Contoh 10. Diberikan sebuah fungsi produksi marginal yang ditunjukkan oleh persamaan MP $36Q – 3Q^2$. Carilah bentuk fungsi produksi total dan produksi rata-ratanya.

a. Produksi total merupakan integrasi dan produksi marginalnya :

$P = \int MP\ dQ = \int (36Q - 3Q^2)\ dQ = 18Q^2 – Q^3$

b. Produksi rata-rata: $AP = P/Q = (18Q – Q^3)/Q$

$= 18Q – Q^2$

10.4.3 Fungsi Pendapatan

Integral dapat pula digunakan untuk memprakirakan pendapatan total (TR) perusahaan dari fungsi pendapatan marginal (MR). Pendapatan marginal adalah perubahan pendapatan total yang diakibatkan oleh penjualan suatu barang tambahan. Dengan demikian pendapatan total tidak lain adalah integral dari pendapatan marginalnya.

Pendapatan total : TR = f(Q)

Pendapatan rata-rata : AR = TR/Q

Pendapatan marginal : MR = dTR/dQ sehingga, $TR = \int MR\ dQ$

Contoh 11. Diketahui fungsi pendapatan marginal sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan MR = 100-30. Carilah fungsi penda patan total TR = f(Q) dan fungsi permintaan P = f(Q).

a. Pendapatan total merupakan integrasi dari pendapatan marginalnya:

   $TR = \int MR\, dQ = \int 100 - 3Q^2\, dQ = 100Q - Q^3 + C$

   Pada saat Q = 0, TR = 0 sehingga C = 0. Jadi.

   $TR = 100Q - Q^2$

b. Fungsi permintaan: $\rightarrow P = AR = TR/Q = \frac{100Q - Q^2}{Q}$

   $\rightarrow P = 100 - Q^2$

Contoh 12. Carilah: (a) fungsi pendapatan total dan (b) fungsi permintaan jika diberikan fungsi marginal $MR = 55 - 40 - Q^2$

a. $TR = \int MR\, dQ = \int 55 - 4Q - Q^2\, dQ$

   $= 55Q - 2Q^2 - 1/3Q^3 + C$

   Pada saat Q = 0,R = 0 sehingga C = 0. Jadi,

   $TR = 55Q - 2Q^2 - \frac{1}{3}Q^3$

b. Fungsi permintaan, $P = TR/Q = (55Q - 2Q^2 - 1/3Q^3)/Q$

   $P = 55 - 2Q - \frac{1}{3}Q^2$

10.4.4 Fungsi Biaya

Seperti halnya pada proses menentuan fungsi produksi, fungsi pembentukan saham modal maupun fungsi pendapatan total, penerapan kalkulus integral dapat digunakan untuk memprakirakan biaya total (TC) dari biaya marginal (MC). Biaya marginal adalah perubahan biaya total yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan output dan hanya biaya-biaya variabel yang berubah bersamaan dengan tingkat outputnya.

Biaya total : $TC = VC(Q) + FC$

Biaya rata-rata: $AC = TC/Q$

Biaya marginal: $MC = dTC/dQ$ sehingga, $TC = \int MC\, dQ = VC + FC$

Contoh 13. Biga marginal suatu perusahaan tekstil dicerminkan olah persamaan MC = 30 + 24Q – 3Q^2. lika biaya tetapnya FC = 40. Carilah fungsi-fungsi biaya total, biaya rata-rata dan biaya variabelnya.

a. TC = ∫MCdQ = ∫(30 + 24Q – 3Q^2) dQ = 30Q + 12Q^2 – Q^2 + K

   Pada FC = 40 dan Q = 0 → TC = FC = 40 maka K = FC = 40

   sehingga biaya total, TC = 30Q + 12Q^2 – Q^2 = 40

b. Biaya rata-rata: AC = TC/Q = (30Q + 12Q^2 – Q^3 + 40)/Q

   = 30 + 12Q – Q^2 + 40/Q

e. Biaya variabel VC = TC – FC = (30Q + 12Q^2 – Q^2 + 40) – 40

   = 30 + 12Q – Q^3

Contoh 14. Diketahui fungsi biaya marginal dicerminkan dengan persama MC = 20$^{(1,5Q)}$ dan biaya tetap FC = 140. Carilah biaya totalnya.

$$TC = \int MCdQ = \int 20e^{0,5Q}\, dQ = 20 \left(\frac{1}{0,5}\right) e^{0,50} + K$$

Pada Q = 0, TC = FC = 140 → TC = 140 = 40^{0,5Q} + K

Karena e$^{0,5(0)}$ = 1 → 140 = 40 + K diperoleh K = 100

Jadi, TC = 40^{0,5Q} + 100. Perhatikan bahwa K tidak selalu sama

10.4.5 Fungsi Utilitas

Fungsi utilitas (kepuasan) total dapat ditentukan dengan melakukan integrasi terhadap fungsi marginal utilitas Marginal utilitas didefinisikan sebagai utilitas tambahan yang dinikmati konsumen berkenaan dengan adanya satu unit tambahan output yang dikonsumsi. Jika fungsi utilitas total dinyatakan sebagai U = f(Q) dimana U adalah total utilitas dan Q jumlah barang yang dikonsumsi, maka:

Utilitas total : U = f(Q)

Ubilitas marginal : MU = dU/dQ sehingga. U = ∫MU đQ

Contoh 15. Carilah persamaan utilitas total dari seorang konsumen, jika diketahui utilitas marginal MU = 80 – 4Q.

Utilitas total merupakan integrasi dari utilitas marginalnya:

U = ∫MU dQ = ∫ (80 – 40) dQ = 80Q – 20^2 + C_0

10.4.6 Fungsi Konsumsi dan Tabungan

Fungsi konsumsi C adalah fungsi yang menghubungkan laju pengeluaran konsumsi masyarakat dengan tingkat pendapatan nasional (Y) yang secara fungsional dinyatakan dalam bentuk persamaan linear C = C, + bY, dimana C, menunjukkan konsumsi otonom karena ia mencerminkan tingkat konsumsi apabila pendapatan nasional Y = 0. Sedangkan b adalah kecenderungan marginal untuk mengkonsumsi (MPC = dC/dY) karena ia mengukur perubahan konsumsi yang disebabkan oleh perubahan satu unit pendapatan nasionalnya.

Fungsi konsumsi : $C = f(Y) = C_2 + bY$

Marginal Propensity to Consume : $MPC = dC/dY = b \rightarrow C = \int MPC\, dy$

Seperti halnya dengan fungsi konsumsi, fungsi tabungan (S) diduga berhubungan erat dengan dengan pendapatan nasional. Berdasarkan kesamaan Y = C + S. hubungan fungsional dapat dinyatakan sebagai S = -C, + (1-b)Y, dimana (1-b) adalah kecenderungan marginal untuk menabung (MPS = dS/dY) karena ia mengukur perubahan dalam tabungan yang disebabkan oleh perubahan satu unit pendapatan nasionalnya..

Fungsi tabungan : $S = f(Y) = -C_2 + (1 - b)Y$

Marginal Propensity to Save : $MPS = dS/dY = 1 - b \rightarrow S = \int MPS\, dY$

Contoh 16. Kecenderungan marginal mengkonsumsi ditunjukkan oleh MPC = dC/dY. Jika diketahui MPC = 0,75 dan konsumsi sebesar C = 50 pada saat pendapatan nol, carilah fungsi konsumsinya.

$C = \int MPC\, dY = \int 0{,}75\, dY = 0{,}75 + C_0$

Pada Y = 0, C = sehingga $C_0 = 50$. Jadi, C = 0,75Y + 50

Contoh 17. Kecenderungan marginal untuk menabung ditunjukkan oleh dS/dY = 30 + $0{,}4^{-0{,}5}$. Jika terdapat tabungan negatif sebesar 20 pada saat pendapatan 100, carilah bentuk fungsi tabungan dan fungsi konsumsinya.

a. Fungsi tabungan $S = \int (30 + 0{,}4Y^{-0{,}5})\, dY = 30Y + 0{,}8Y^{0{,}5} + C_0$

Pada Y = 100, S = -20 $\rightarrow$ $-20 = 30(100) + 0{,}8(100)^{0{,}5} + C_0$

$-20 = 3000 + 8 + C_0 \rightarrow C_0 = -3028$

Jadi, $S = 30Y + 0{,}8Y^{0,5} – 3028$

b. Fungsi konsumsi, $C = Y – S = Y – (30Y + 0{,}8Y^{0,5} – 3028)$

$= 3{,}028 – 29Y – 0{,}8Y^{0,5}$

Contoh 18. Kecenderungan marginal untuk menabung ditunjukkan oleh $dS/dY = 2 + 0{,}2Y^{-0,5}$. Terdapat tabungan sebesar 40 jika pendapatan keseimbangan 100. Carilah fungsi tabungan, fungsi konsumsi dan hitunglah besar konsumsi masyarakat pada tingkat pendapatan tersebut.

a. $S = \int (2 + 0{,}2Y^{-0,5})\, dY = 2Y + 0{,}4Y^{0,5} + C_0$

Pada $Y = 100$, $S = 40$ $\rightarrow 40 = 2(100) + 0{,}4(100)^{0,5} + C_0$

$\rightarrow 40 = 200 + 4 + C_0$ sehingga $C_0 = -164$

Jadi, $S = 2Y + 0{,}4Y^{0,5} – 164$

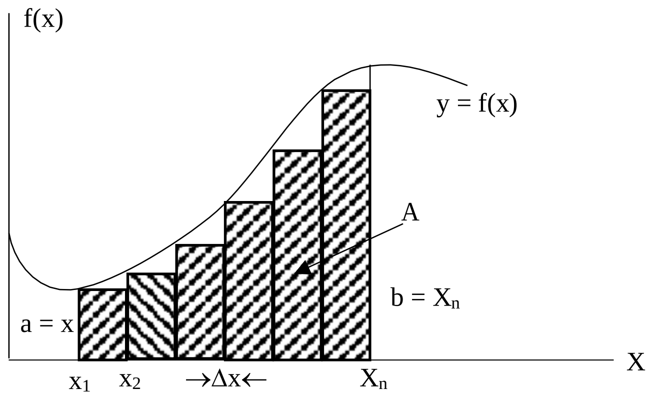
b. $C = Y – S \rightarrow C = Y – (2Y + 0{,}4Y^{0,5} – 164)$

$= 164 – Y – 0{,}4Y^{0,5}$

Pada $Y = 100 \rightarrow C = 164 – (100) – 0{,}4(100)^{0,5} = 60$

10.5 INTEGRAL TERTENTU

Seperti yang telah diuraikan di atas, integrasi adalah suatu metode untuk menentukan luasan di bawah suatu kurva. Integrasi dapat juga didefinisikan sebagai suatu proses untuk mencari nilai limit dari penjumlahan persegi panjang-persegi panjang apabila banyaknya persegi panjang bertambah menjadi tak terhingga.



Gambar 10.2. Bidang di Bawah Kurva

Kita pandang suatu luasan yang dibatasi oleh kurva f(x) yang kontinu pada interval [x = a dan x = b]. Jika interval x = a sebagai limit bawah (lower limit) dan x =

b sebagai limit atas (*upper limit*) dibagi menjadi n sub-interval [a = x_1, x_2, x. , x_1, x_1=b] yang selisihnya antara interval sama (b-al/n = Ax, Persegi panjang-persegi panjang tersebut dibangun sedemikian rupa sehingga tinggi masing-masing adalah sama dengan nilai terkecil suatu fungsi tersebut dalam sub-interval. Dengan demikian jumlah luas bidang persegi panjang akan mendekati tetapi kurang dari luas yang sebenarnya dari bidang di bawah kurva.

Luas dari persegi panjang-persegi panjang yang digambarkan di atas dapat diekspresikan dalam bentuk:

$A = f(x_1)\Delta x_1 = f(x_2)\Delta x_2 + f(x_3)\Delta x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(x_1)\Delta x_n$

$$A = \sum_{i=1}^{n} f(x_1)\,\Delta x_1 \qquad 10-8$$

Semakin kecil sub-interval Δx semakin banyak persegi panjang yang terbentuk dan luas bidang gabungan persegi panjang persegi panjang akan semakin mendekati luas bidang di bawah kurva y = f(x). Jika kita misalkan $n \to \infty$ dan maksimum Δ-40, maka luasan di bawah kurva diantara interval [a,b] yang tidak termasuk dalam persegi panjang persegi panjang menurun dan sesungguhnya mendekati nol. Kenyataan ini dapat diterangkan menjadi:

$$A = \lim_{n-\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ \Delta x_1 \to 0}}^{n} f(x_1)\,\Delta x_1 \qquad 10-9$$

Untuk fungsi f(x) yang kontinu pada interval [a,b] luas bidang kurva dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$A = \lim_{n-\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ \Delta x_1 \to 0}}^{n} f(x_1)\,\Delta x_1 \int_a^b f(x_1)dx \qquad 10-10$$

Bentuk terakhir menyatakan bahwa nilai bilangan integral tertentu dari suatu fungsi f(x) yang kontinu pada interval [a,b] ditunjukkan oleh integral tak tentu F(x) + C yang dievaluasi pada limit atas (*upper limit*) pengintegralan b dikurangi integral tak tentu yang sama F(x) + C yang dievaluasi pada limit bawah (*lower limit*) pengintegralan a.

Dengan demikian, jika F(x) adalah integral tak tentu f(x), maka integral tertentu pada interval [a,b] tidak lain hanyalah mengintegrasikan f(x) dari suatu titik tetap a ke titik sebarang b dan menambahkan konstanta F(a) untuk memperoleh F(b) yaitu:

$$\int_{a}^{a} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - f(a) \qquad 10-11$$

Bentuk ini menyatakan bahwa kita dapat menghitung integral melulu dengan pengurangan jika kita mengetahui suatu primitif F(x). Dengan bentuk ini persoalan perhitungan integral diubah menjadi persoalan lain yaitu mencari primitif F(x) dari f(x).

Contoh 19. Evaluasilah masing-masing integral tertentu di bawah ini:

a. $\int_{1}^{3} 3x^2 - 4x + 8dx = \cdots$

$$\int_{1}^{3} 3x^2 - 4x + 8dx = (x^3 - 2x^2 + 8x)\Big|_{1}^{3}$$

$$= [(3)^3 - 2(3)^2 + 8(3)] - [(1)^3 - 2(1)^2 + 8(1)] = 28$$

b. $\int_{0}^{1} 4e^{2x}\, dx = \cdots$

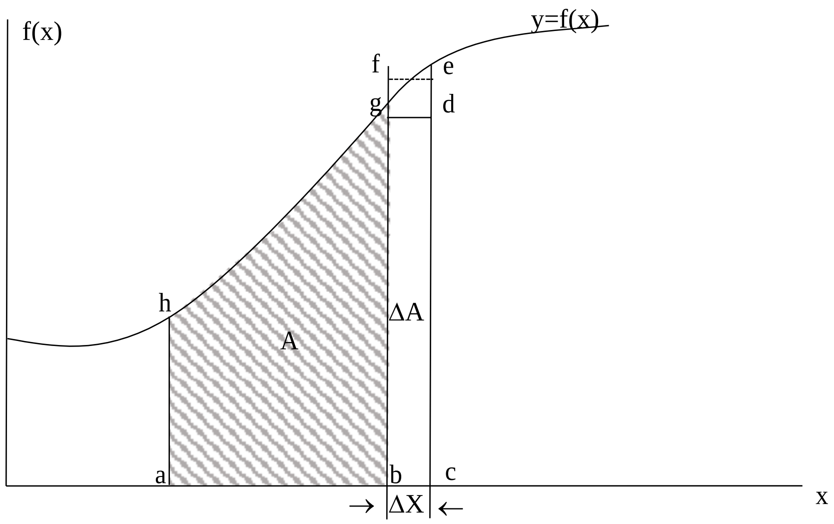
$$\int_{0}^{1} 4e^{2x}\, dx = 2e^{2x}\Big|_{0}^{1} = 2[e^{2(1)} - 2e^{2(0)}] = 2[e^2 - 1] = 2e^2 - 2$$

c. $\int_{0}^{100} 1(x + 8) = \cdots$

$$\int_{0}^{100} 1(x + 8)\, dx = \mathrm{In}(x + 8)\Big|_{0}^{100} = [\mathrm{In}(108) - \mathrm{In}(8)] = 2,60$$

10.6 AREAL SEBAGAI SUATU INTEGRAL TERTENTU

Pengintegralan seperti yang telah dijelaskan dapat digunakan untuk menghitung luas areal yang terletak di bawah suatu kurva y = f(x) yang dibatasi oleh suatu fungsi dan sumbu ordinat.



Gambar 10.3. Luas Areal di Bawah Kurva.

Pada Gambar 11.3. Luas areal antara ordinat yang tetap pada x = a dan variabel tidak tetap pada x = b dapat dipandang sebagai luasan yang ditunjukkan oleh luas A yaitu bidang abgh. Jika x mengalami perubahan sedikit saja Δx, luas A akan mengalami peningkatan sebesar AA yaitu bidang bceg.

Luas (bcdg) < Luas (bceg) < Luas (bcef)

(bg)-Δx < ΔA < (ce) Ax

Jika masing-masing suku dibagi dengan Δx, maka:

(bc) < ΔA/AΔx < (ce)

Untuk $\Delta x \rightarrow o$, selama kurva y = f(x) kurva kontinu, ce akan mendekati bg, yaitu:

$$\frac{dA}{dx} = f(x) \rightarrow dA = f(x)\,dx$$

Dengan mengintegralkan masing-masing suku, maka luas areal di bawah kurva dapat ditunjukkan sebagai:

$$A = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Dengan demikian luasan bidang yang dibatas oleh kurva y = f(x) dan sumbu ordinat dengan batas-batas x = a dan x = b ditunjukkan oleh:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad 10-12$$

Contoh 20. Hitunglah luas areal di bawah kurva f(x):

a. $f(x) = -x^2 + 4x$ pada batas-batas x = 0 dan x = 2

$$A = \int_0^2 -x^2 + 4x\,dx = -(1/3)x^3 + 2x^2 \Big|_0^2$$

$$= -\left(\frac{1}{3}\right)(2)^3 + 2(2)^2 - 0$$

= 16/3 (Gambar 11.4a)

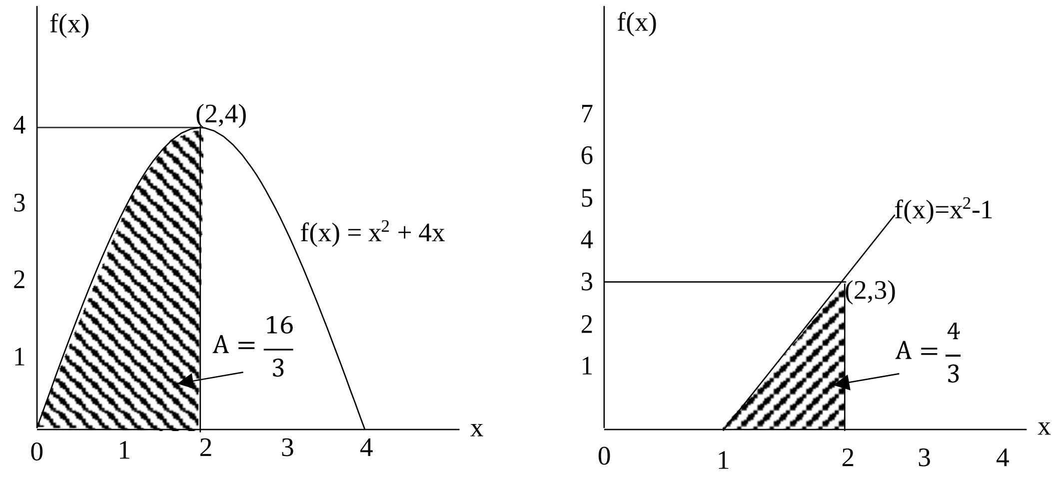
b. f(x) = x^2-1 pada batas-batas x = 1 dan x = 2

$$A = \int_1^2 x^2 - 1\,dx = \left(\frac{1}{3}\right)x^3 - x \Big|_0^2$$

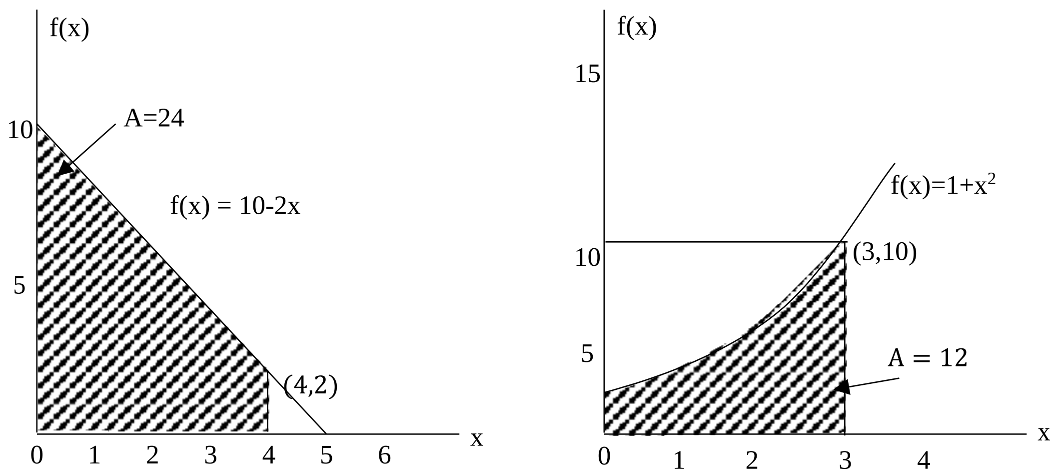
$$= \left[\left(\frac{1}{3}\right)(2)^3 - (2)\right] - \left[\frac{1}{3} - 1\right]$$

= 4/3 (Gambar 11.4a)

f(x) = x^2-1 pada batas-batas x = 1 dan x = 2



Gambar 10.4



Gambar 10.5

c. f(x) = 10 – 2x pada batas-batas x = 0 dan x = 4

$$A = \int_0^4 10 - 2x\,dx = 10x - x^2 \Big|_0^4$$

$$= [10(4) - (4)^2] - 0 = 40 - 16$$

$$= 24 \qquad \text{(Gambar 10.5a)}$$

d. f(x) = 1 – 2x pada batas-batas x = 0 dan x = 3

$$A = \int_0^3 1 + x^2\,dx = x + \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^3$$

$$= [3 + \frac{1}{3}(3)^3] - 0 = 3 + 9$$

$$= 12 \qquad \text{(Gambar 10.5b)}$$

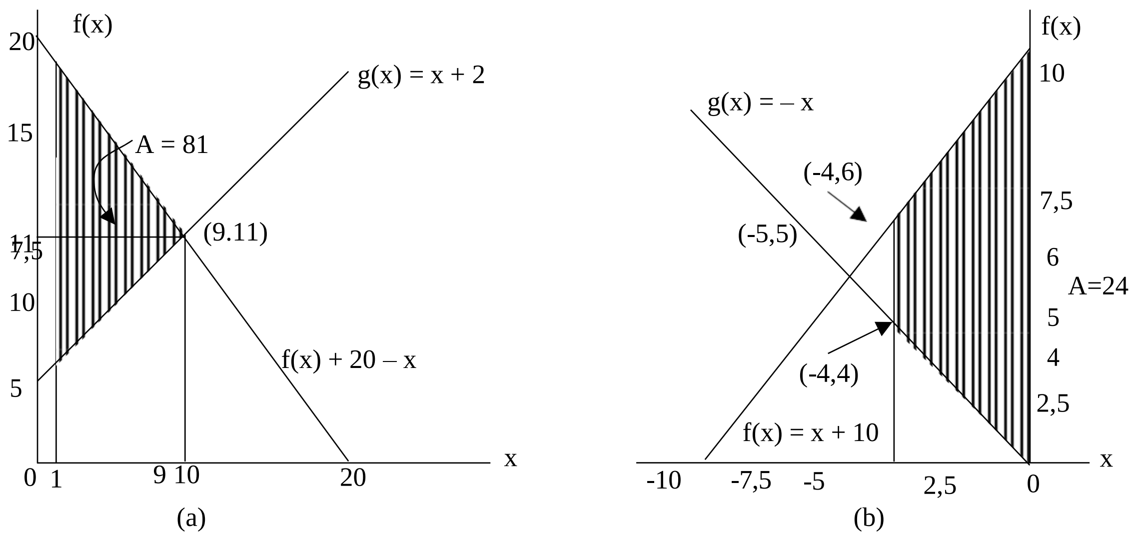
Contoh 21. Hitunglah luas areal diantara dua kurva f(x) dan g(x):

a. Kurva f(x) = 20 – x dan g(x) = x + 2 untuk x = 1 dan x = 9

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b [(20 - x) - (x + 2)]dx$$

$$= \int_1^9 18 - 2x\,dx = 18x - x^2 \Big|_0^3 = 18(9) - (9)^2 - 0$$

$$= 162 - 81 = 81 \qquad \text{(Gambar 10.6a)}$$



Gambar 10.6.

b. Kurva f(x) = x + 10 dan g(x) = -x untuk x = -4 dan x = 0

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_{-4}^{0} [(x + 10) - (-x)]dx$$

$$= \int_{-4}^{0} 10 - 2x\, dx = 10x + \frac{2}{3}x^3 \Big|_{-4}^{0} = 0 = [10(-4) + \frac{2}{3}(-4)^3]$$

= 0 – [-40 + 16] = 24 (Gambar 10.6b)

Contoh 22. Hitunglah luas areal diantara dua kurva f(x) dan g(x):

a. Kurva f(x) = 20 – ½ dan g(x) = 10 untuk x = 0 dan x = 10

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^{10} (20 - \frac{1}{2}x) - 10]dx$$

$$= \int_0^{-10} 10 - \frac{1}{2}x\, dx = 10x - \frac{1}{4}x^2 \Big|_0^{10} = 10\,(10 - \frac{1}{4}(10)^2 - 0)$$

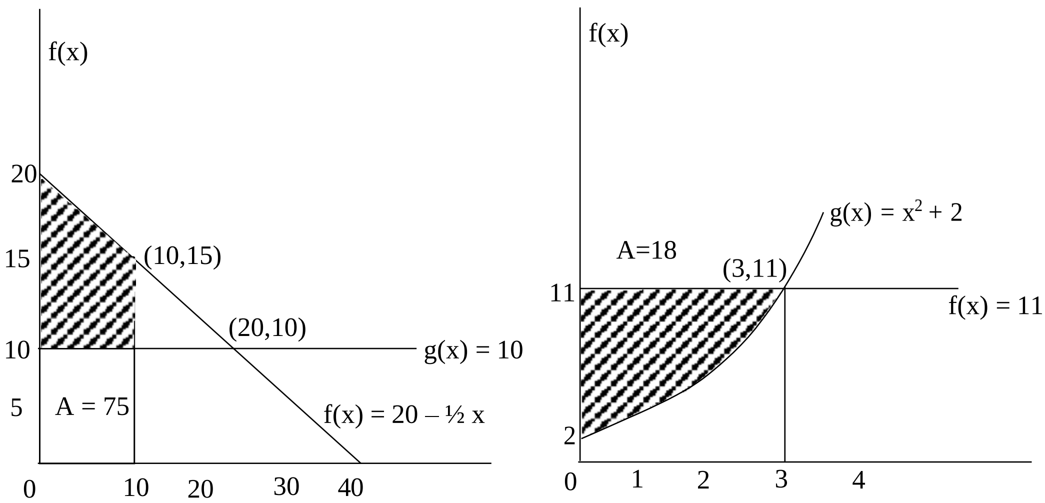
= 100 – 25 = 75 (Gambar 10.7a)

b. Kurva f(x) = 11 dan g(x) = x^2 + 2 untuk x = 0 dan x = 3

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^{3} [(11) - (x^2 + 2)]dx$$

$$= \int_0^{3} 9 - x^2\, dx = 9x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{3} = (9(3) - \frac{1}{3}(3)^3) - 0$$

= 27 – 9 = 18 (Gambar 10.7b)



Gambar 10.7.

10.7 SIFAT-SIFAT INTEGAL TERTENTU

1. Jika fungsi g(x) dan h(x) masing-masing integrabel pada interval [a,b] maka fungsi g(x)+h(x) integrabel pula pada [a,b] dan berlaku:

$$\int_a^b g(x) + h(x)dx = \int_a^b g(x) + dx + \int_a^b h(x) + dx \qquad 10-13$$

Contoh 23,

$$\int_1^5 3x^2 + 10x\ dx = \int_1^5 3x^2dx + \int_1^5 10x\ dx = x^3 \Big|_1^5 + 5x^2 \Big|_1^5$$

= [125 – 1] + [125 – 5] = 244

2. Jika fungsi g(x) integrabel pada interval [a,b] dan k suatu bilangan tetap, maka fungsi kg(x) integrabel pula pada [a,b] dan berlaku:

$$\int_a^b kg(x)dx = k\int_2^b g(x)dx \qquad 10-14$$

Contoh 24,

$$\int_2^{10} 11x\,dx = 5{,}5x^2 \Big|_2^{10} = 5{,}5(100-4) = 528 \text{ atau}$$

$$11\int_2^{10} x\,dx = 11\ \left(\frac{1}{2}x^2\right) \Big|_2^{10} = 11(50-2) = 528$$

3. Jika fungsi g(x) integrabel pada interval [a,b] dan [b,c], maka fungsi g(x) integrabel pula pada [a,c] dan berlaku:

$$\int_a^b g(x)dx + \int_b^c g(x)dx = \int_a^c g(x)dx \qquad 10-15$$

Contoh 25,

$$\int_3^5 6x^2\ dx + \int_5^8 6x^2\ dx = \int_3^8 6x^2\ dx$$

$$2x^3 \Big|_3^5 + 2x^3 \Big|_5^8\ 2x^3 \Big|_3^8 \rightarrow 2(125-27) + 2(512-125) = 2(512-27)$$

4. Jika fungsi g(x) integrabel pada interval [a,b] maka fungsi g(x) integrabel pula pada [b,a] dan berlaku:

$$\int_a^b g(x)dx = -\int_b^a g(x)dx \qquad 10-16$$

Contoh 26,

$$\int_0^3 e^x\,dx \;= -\int_3^0 e^x\,dx$$

dapat dihitung $e^3 \Big|_0^3 = (e^3 - e^0) = 20{,}09 - 1 = 19{,}09$

atau $-e^x \Big|_3^0 = -(e^0 - e^3) = -1 + 20{,}09 = 19{,}09$

5. Jika fungsi g(x) integrabel pada interal [a,a] maka fungsi g(x) integrabel sama dengan nol.

$$\int_a^a g(x)dx = 0 \qquad 10-17$$

Contoh 27,

$$\int_3^3 4e^x\,dx \;= 4e^x \int_3^0 [4e^3 - 4e^3]\; 80{,}34 - 80{,}34 = 0$$

10.8 INTEGRAL SEMU

Suatu integral fungsi terbatas pada selang tak terhingga (pada limit atas dan atau limit bawah) serta integral suatu fungsi yang nilainya di sekitar suatu titik dapat dibuat lebih besar dari bilangan riil mana pun juga.

Jika fungsi f: [a,∞] → R atau f: [-∞, b] → R kontinu, maka:

$$\int_a^\infty f(x)dx \;\; \text{dan} \;\; \int_\infty^b f(x)dx \qquad 10-18$$

Integral diatas disebut *Integral Semu* karena nilai +∞ atau -∞ bukan merupakan bilangan dan tidak dapat disubstitusikan pada F(x). Akan tetapi integral tersebut dapat didefinisikan sebagai limit dari integral yang lainnya.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

atau

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx \qquad 10-19$$

Integral semu dikatakan konvergen ke L. jika limit pada ruas kanan ada dan sama dengan L. Sebaliknya jika limit itu tidak ada atau sama dengan + atau -, maka integral semu itu dikatakan divergen.

Contoh 28. Evaluasi integral semu di bawah ini:

a. $\int_{1}^{\infty} \frac{-1}{(x+8)^2}$ dx = ………

Misalkan: u = x+8 du=dx, maka:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{-1}{(x+8)^2} dx = \int_{1}^{\infty} \frac{-1}{u^2} du = \frac{1}{u}$$

Dengan substitusi u = x + 8 dan memasukkan limit dari x,

$$\int_{1}^{\infty} \frac{-1}{(x+8)^2} dx = \lim_{a\to\infty} \int_{1}^{a} \frac{-1}{(x+8)^2} dx = \frac{1}{(x+8)} \Big|_{1}^{b}$$

$$= \frac{1}{(a+8)} - \frac{1}{(1+8)}$$

Karena a → ∞, maka 1/(a+8) → 0. Integral tersebut, konvergen dan sama dengan -1/9

b. $\int_{3}^{\infty} \frac{-1}{(x+4)}$ dx = ………

Misalkan: u = x+4 → du = dx, maka:

$$\int_{3}^{\infty} \frac{1}{(x+4)} dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{u} du = \mathrm{In}\,|\,u\,|$$

Dengan substitusi u = x + 4 dan memasukkan limit dari x,

$$\int_{3}^{\infty} \frac{1}{(x+4)} dx = \lim_{b\to\infty} \int_{3}^{b} \frac{1}{(x+4)} dx = \mathrm{In}\,|\,x+4\,| \Big|_{3}^{b}$$

$$= \ln|b+4| - \ln|3+4|$$

Karena b → ∞, maka $\ln|b+4|$ → ∞. Integral tersebut, divergen dan tidak ada artinya.

c. $\int_{-\infty}^{2} \frac{8}{x^2}$dx = ………

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{8}{8^2} dx = \lim_{a \to \infty} \int_{a}^{2} \frac{8}{x^2} dx = -\frac{8}{x} \Big|_{a}^{2}$$

$$= -\frac{8}{x} + \frac{8}{a}$$

Karena a → ∞ maka 8/a = 0. Integral tersbut konvergen dan mempunyai nilai -4.

d. $\int_0^{25} \frac{1}{\sqrt{25-x}} dx =$ ……

Misalkan u = 25 – x → du = -dx, maka:

$$\int_{0}^{25} \frac{1}{\sqrt{25-x}} dx = \int_{0}^{25} \frac{-1}{\sqrt{u}} du = -2\sqrt{25-x} \Big|_{0}^{a}$$

Dengan substitusi u = 25 – x dan memasukkan limit dari x,

$$\int_{0}^{25} \frac{1}{\sqrt{25-x}} dx = \lim_{a \to 25} \int_{0}^{a} \frac{1}{\sqrt{(25-x)}} dx = -2\sqrt{25-x} \Big|_{0}^{a}$$

$$= 2\left[\sqrt{(25-a)} - \sqrt{(25-a)}\right] = -2\sqrt{(25-a)} + 2\sqrt{25}$$

Karena a→25 maka $\sqrt{(25-a)}$ →0. Integral tersebut konvergen mempunyai nilai $2\sqrt{25} = 10$

10.9 METODE NUMERIK UNTUK MENGHITUNG INTEGRAL TERTENTU

Pada pasal sebelumnya-secara tidak langsung-kita telah menghitung suatu integral tertentu fungsi f(x) secara eksak. Berikut ini akan diberikan beberapa aturan penghitungan integral fungsi f(x), jika ada, dengan nilai penghampiran integral secara numerik.

Ada 4 (empat) macam aturan penghitungan integral tertentu fungsi f(s) secara numerik, yaitu:

10.9.1 Aturan Trapesium

Pandanglah suatu hiasan di bawah kurva fungsi y = f(x) sembarang. Luas bidang di bawah kurva fungsi y = f(x) dengan sumbu x dalam batas interval [a,b] sebenarnya diperoleh dengan membagi bidang antara a dan b dibagi menjadi n sub-interval [a = x_1, x_2, x_3, …., x_{a-1}, x_n = b] yang selisihnya antara interval sama yaitu [b –

a]/n = Δx_i = h. Masing-masing bidang ternyata membentuk segi empat yang dibangun sedemikian rupa sehingga masing-masing bentuknya merupakan trapesium-trapesium. Nilai penghampiran luasan yang dibatasi pada interval a dan b merupakan penjumlahan trapesium-trapesiumnya ($A_1 + A_2 + A_3 \ldots. + A_{n-1} + A_n$).

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = (A_1 + A_2 + A_3 \ldots\ldots + A_{n-1} + A_n) \qquad 10-20$$

Pada aturan trapesium disebutkan bahwa luas segi empat trapezium adalah setengah kali alas kali penjumlahan sisi-sisinya.

$A_1 = ½\, h(y_1 + y_2)$

$A_2 = ½\, h(y_2 + y_3)$

$A_3 = ½\, h(y_3 + y_4)$

…………………

$A_{n-2} = ½\, h(y_{n-2} + y_{n+1})$

$A_{n-1} = ½\, h(y_{n-1} + y_n)$

--+

$A = A_1 + A_2 + A_3 \ldots\ldots A_{n-2} + A_{n-t}$

Penjumlahan memberikan luas yaitu:

$$A = \int_a^b f(x)dx = (A_1 + A_2 + A_3 \ldots\ldots A_{n-2} + A_{n-1})$$

$A = g\,(½y_1 + y_2 + \ldots\ldots. + y_{n-2} + y_{n-1} + ½\, y_n)$

Secara umum dituliskan:

$$A = h\,[\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{y_i + y_n}{2}] \qquad 10-21$$

10.9.2 Aturan Simpson

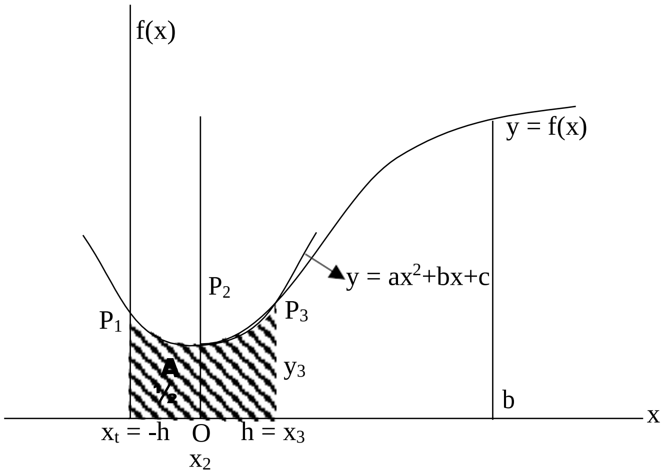
Pada aturan Simpson, selang [a,b] dibagi menjadi bilangan genap selang bagian yang sama panjang yaitu [b – a]/n = Δx_i = h dan ditarik ordinat-ordinatnya yaitu $y_1, y_2, \ldots., y_{n-2}, y_{n-1}, y_n$ melalui tiap tiga titik p mulai titik p_1, p_2, p_3 sepanjang parabola yang sumbunya vertikal, jadi $y = ax^2 + bx + c$.

Pandanglah luasan di bawah parabola $y = ax^2 + bx + c$ pada bidang yang dibatasi titik-titik x_1, p_1, p_2, p_3. Titik-titik tersebut mempunyai koordinat yaitu $p_1(-h,y_1)$, $p_2(0,y_2)$ dan $p_3(h,y_3)$ dan berlaku:

$y_1 = a(-h)^2 + b(-h) + c \quad \rightarrow y_1 = ah^2 - bh + c$

$y_2 = a(0)^2 + b(0) + c \quad \rightarrow y_2 = c$

$y_3 = a(+h)^2 + b(+h) + c \quad \rightarrow y_3 = ah^2 + bh + c$



Gambar 10.9 Bidang di Bawah Kurva Aturan Simpson.

Luas bidang yang dibatas x_1, p_1, p_2, p_3, x_3 dengan sumbu-x menjadi:

$$A_1 = \int_{-h}^{+h} ax^2 + bx + c\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}bx^2 + ch \Big|_{-h}^{+h}$$

$$A_1 = \frac{2}{3}h^3 + 2cg = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c)$$

Dengan memasukkan nilai y_1, y_2 dan y_3 di atas selanjutnya ditulis kembali yaitu $A_1 = h/3\ (y_1 + 4y_2 + y_3)$

Penggunaan dalam numerik :

$A_1 = h/3\ (y_1 + 4y_2 + y_3)$

$A_2 = h/3\ (y_3 + 4y_4 + y_5)$

$A_3 = h/3\ (y_5 + 4y_6 + y_7)$

$A_{n-2} = h/3\ (y_{n-4} + 4y_{n-3} + y_{n-2})$

$A_{n-1} = h/3\ (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$

....+

$A = A_1 + A_2 + A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{n-1}$

Penjumlahan sampai ke-n memberikan:

$$A = \int_a^b f(x)dx = A_1 + A_2 + A_3 \ldots\ldots A_{n-2} + A_{n-1}$$

$A = h/3\ (y_1 + 4y_2 + 2y_3 + \ldots\ldots\ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$

Secara umum dituliskan:

$$A = \frac{1}{3} h \ [\sum_{i=1}^{n} y_i \, . \, s_i] \qquad 10-22$$

10.9.3 Aturan Titik Tengah

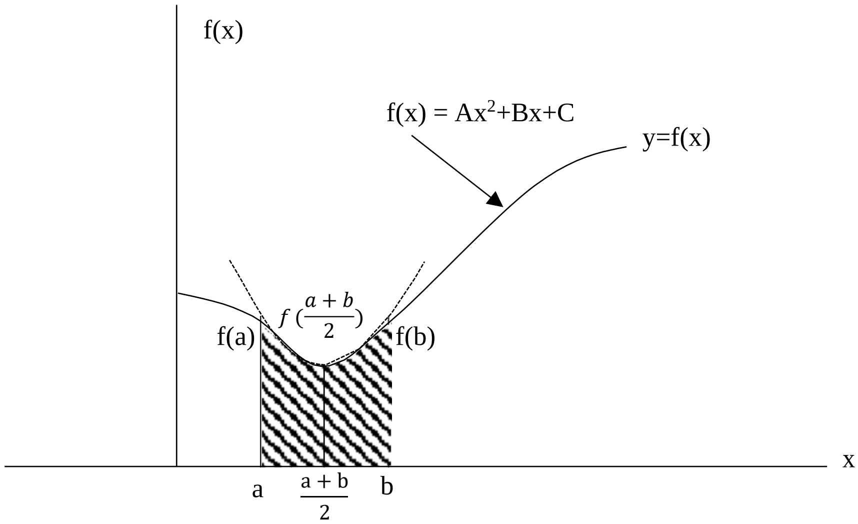
Pada aturan titi tengah, daerah yang dibatasi selang [a,b] diganti dengan siku empat-siku empat sama panjang [a, b]/2 = Δx_i = h dan ditarik ordinat-ordinatnya yaitu f(a), f[1/2 (a+b)] dan f(b) sepanjang parabola f(x) = $Ax^2 + Bx + C$.

Pandanglah suatu luasan di bawah parabola y = $Ax^2 + Bx + C$ pada bidang yang dibatas titik-titik x = a, f(a), x = ½ (a+b), f[1/2 (a+b)], x = b, f(b) dan berlaku:

$f(a) = Aa^2 + Ba + C$

$f[1/2\,(a+b)] = A[1/2\,(a+b)]^2 + B[1/2\,(a+b)] + C$

$f(b) = Ab^2 + Bb + C$



Gambar 10.10. Bidang di Bawah Kurva Aturan Titik Tengah.

Luas bidang persamaan parabola yang dibatas x = a, x = b dengan sumbu-x menjadi:

$$A = \int_a^b Ax^2 + Bx + Cdx = \frac{1}{3}Ax^3 + \frac{1}{2}Bx^2 + Cx \Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{3}A(b-a)^3 + 1/2B(b-a)^2 + C(b-a)$$

$$= \frac{b-a}{3}[a(b-a)^2 + \frac{3}{2}B(b-a) + 3C]$$

Dengan memasukkan nilai-nilai f(a), f([a+b]/2) dan f(b) di atas selanjutnya dapat ditulis menjadi,

$$A = \frac{b-a}{6}\,[f(a) + 4f\,(a + b) + f(b)] \qquad 10\text{-}23$$

10.9.4 Ekspansi Taylor

Ada beberapa fungsi f(x) yang tidak dapat diintegralkan dengan beberapa aturan seperti di atas. Untuk ini diperkenalkan suatu fungsi sembarang yang turunan diferensial kontinu sampai orde ke-n pada interval [a,b].

Secara umum ekspansi Taylor dapat dituliskan:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) +$$

$$\ldots\ldots\ldots.. + \frac{(x-a)^{n-1}}{n!}f^{n-1}(a) + R_n \qquad 10-24$$

Bentuk $R_n = \frac{(x-a)^n}{n!}$ f^n (t) a < t < x, merupakan sisa suku Lagrange.

Contoh 29, Hitunglah integral $\int_1^3 x^2$ dx dengan cara:

a. Eksak
b. Aturan Trapesium
c. Aturan Simpson
d. Aturan Titik Tengah
e. Ekspansi Taylor

a. Dengan cara eksak/dihitung langsung:

$$\int_1^3 x^4 dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_1^3 = \frac{1}{5}(3^5 - 1^5) = \frac{1}{5}(243 - 1) = 48{,}4$$

b. Aturan Trapesium:

Misalkan n = 10 sub-bagian, maka [a-b]/n = (3-1)/10 = 0,2

x_t	$y=f(x)=x^4$	Tetapan Simpson (s)	Hasil Kali $f(x_i).s$
1	1,00	1	1,00
1,2	2,07	4	8,29
1,4	3,84	1	7,68
1,6	6,55	4	26,21
1,8	10,50	2	21,00
2	16,00	4	64,00
2,2	23,43	2	46,85
2,4	33,18	4	132,71
2,6	45,70	2	91,40

2,8	61,47	4	245,86
3	81,00	1	81,00
	------------+		------------+
$\sum \boldsymbol{y_1} = \sum \mathbf{f(x)} = \mathbf{284,73}$		$\sum f(x).s = 726{,}01$	

$$A = h\left[\sum_{i=1}^{n} y_i = -\frac{y_1 + y_n}{2}\right]$$

$$= 0{,}2x\left[284{,}73 - \frac{1{,}0 + 81{,}0}{2}\right] = 48{,}7$$

c. Aturan Simpson:

$$A = \frac{h}{3}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i . S_1\right]$$

$$= \frac{0{,}2}{3}[726{,}01] = 48{,}4$$

d. Aturan Titik Tengah

Fungsi kontinu f(x) = x^4 pada interval a = 1 dan b = 3

f(a) = f(1) = 1

f[1/2 (a+b)] = f(2) = 16

f(b) = f(3) = 81

$$A = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f([a+b]/2) + f(b)]$$

$$= \frac{3-1}{6}[1{,}0 + 4(16) + 81] = 48{,}7$$

e. Ekspansi Taylor

$f(x) = x^4$	untuk a = 2	f(2)	= 16
$f^1(x) = 4x^3$		$f^1(2)$	= 32
$f^2(x) = 12x^2$		$f^2(2)$	= 48
$f^3(x) = 24x^1$		$f^3(2)$	= 48
$f^4(x) = 24$		$f^4(2)$	= 24
$f^5(x) = 0$		$f^5(2)$	= 0

$$f(x) = 16 + \frac{(x-2)}{1}(32) + \frac{(x-2)^2}{2}(48) + \frac{(x-2)^3}{6}(48) + \frac{(x-2)^4}{24}(24) + \frac{(x-2)^5}{120}(0)$$

$= 16 + 32\,(x-2) + 24\,(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4$

Dengan mengintegralkan masing-masing ruas:

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 16 + 32(x-2) + 24(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4 dx$$

$$= 16x + 16(x\text{-}2)^2 + 8(x\text{-}2)^3 + 2(x\text{-}2)^4 + 1/5(x\text{-}2)^5 \Big|_1^3$$

= (48 + 16 + 8 + 2 + 0,2) – (16 + 16 – 8 + 2 – 0,2)

= 48,4

Contoh 30, Hitunglah integral $\int_0^6 3x^2 + 2x + 1dx$ dengan cara:

a. Eksak
b. Aturan Trapesium
c. Aturan Simpson
d. Aturan Titik Tengah
e. Ekspansi Taylor

a. Dengan cara exsak/dihitung langsung:

$\int_0^6 3x^2 + 2x + 1dx = x^3 + x^2 + x^0 = [6^3 + 6^2 + 6] – 0$

= 258

b. Aturan Trapesium:

Misal n = 12 sub-bagian, maka [a-b]/n = (6-0)/12 = 0,25

x_i	$f(x)=3x^2+2x+1$	Tetapan Simpson	Hasikali $f(x_i).s$
0,0	1,00	1	1
0,5	2,75	4	11
1,0	6,00	2	12
1,5	10,75	4	43
2,0	17,00	2	24
2,5	24,75	4	99
3,0	34,00	2	68
3,5	44,75	4	1179
4,0	57,00	2	1114
4,5	70,75	4	2283
5,0	86,00	2	1172
5,5	102,75	4	4411
6,0	121,00	1	1121
	---------------------------+		---------------------------+
$\boldsymbol{\sum y_1 = \sum f(x) = 578,50}$		$\sum f(x).s = 1548$	

$$A = h\left[\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{y_1 + y_n}{2}\right]$$

$$= 0{,}5\,[578{,}5 - \frac{1+121}{2}] = 258{,}75$$

c. Aturan Simpson:

$$A = \frac{h}{3}\,[\sum_{i=1}^{n} y_i.\,s_i] - \frac{0{,}5}{3}x(1{,}548)$$

$= 258$

d. Aturan Titik Tengah

Fungsi kontinu $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ pada interval a = 0 dan b = 6

$f(a) \quad = f(0) = 1$

$f[(a+b)/2] = f(3) = 34$

$f(b) \quad = f(6) = 81$

$$A = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f([a+b]/2) + f(b)]$$

$$= \frac{6-0}{6}[1 + 4(34) + 121] = 258$$

e. Ekspansi Taylor

$f(x)$	$= 3x^2 + 2x + 1$ untuk a = 3	$f(3) = 34$
$f^1(x)$	$= 6x + 2$	$f^1(3) = 20$
$f^2(x)$	$= 6$	$f^2(3) = 6$
$f^3(x)$	$= 0$	$f^3(3) = 0$

$$f(x) = 34 + \frac{x-3}{1}(20) + \frac{(x-3)^2}{2}(6) + \frac{(x-3)^3}{6}(0)$$

$$= 34 + 20\,(x-3) + 3\,(x-3)^2$$

$$\int_0^6 f(x)dx = \int_0^6 34 + 20(x-3) + 3(x-3)^2 dx$$

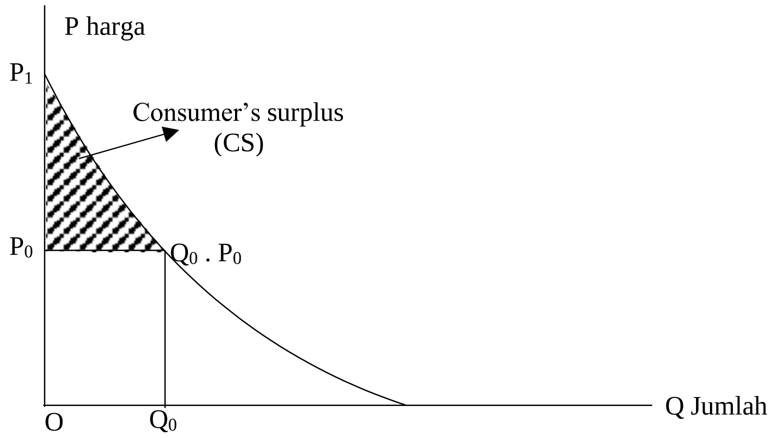
$$= 34x + 10(x-3)^2 + (x-3)^2 \Big|_0^6$$

$$= (204 + 90 + 27) - (0 + 90 - 27) = 321 - 63$$

$$= 258$$

10.10 SURPLUS KONSUMEN

Dalam hukum permintaan kita melihat bahwa besar kecilnya jumlah barang yang dimita konsumen sangat tergantung pada tingkat harga barang yang bersangkutan. Suatu fungsi permintaan P = f(Q) menunjukkan jumlah suatu barang yang akan dibeli oleh konsumen pada tingkat harga tertentu yaitu bila harga turun jumlah barang yang diminta akan bertambah, dan sebaliknya bila harga naik, jumlah yang diminta berkurang dengan asumsi keadaan lainnya tetap (*ceteris paribus*). Dengan demikian jika keseimbangan dalam pasar berada pada (Q_0P_0), maka bagi konsumen tertentu yang sebetulnya mampu dan bersedia membayar dengan harga yang lebih tinggi dari P_o merupakan suatu keuntungan. Keuntungan lebih semacam ini disebut surplus konsumen (*consumers surplus* atau CS).



Gambar 10.11. Surplus Konsumen

Secara geometris, besarnya surplus konsumen ditunjukkan oleh luas areal di bawah kurva permintaan tetapi diatas tingkat harga pasar.

$$CS = \int_{0}^{Q_0} f(Q)dQ - P_0\, Q_0 \qquad 10 - 25$$

Besarnya surplus konsumen dapat juga dicari dengan cara lain yaitu ditunjukkan oleh luas fungsi permintaan Q = f(P) yang dibatasi oleh titik-titik (Q_1, P_1) dan titik keseimbangan (Q_0, P_0).

$$CS = \int_{P_0}^{P_1} f(P)dP \qquad 10 - 26$$

Contoh 31. Fungi permintaan suatu barang dicerminkan oleh persamaan $P = (5 - Q)^2$. Jika keseimbangan pasar terjadi pada harga P = 9, hitunglah surplus konsumen (CS).

Keseimbangan harga $P_0 = 9$. Jadi, $(5 - Q)^2 = 9 \quad \rightarrow 5 - Q = 3$

$\rightarrow Q_0 = 2$

$$CS = \int_{0}^{Q_0} f(Q)dQ - P_0\,Q_0 = \int_{0}^{2} (5-Q)^2 \;dQ - (9)(2)$$

$$= \left(25Q - 5Q^2 + \frac{1}{3}Q^3\right) \Big|_{0}^{2} - 18$$

$$= [(50 - 20 + 2{,}67) - 0] - 18$$

$= 14{,}67$ (Gambar 10.12a)

Cara lain: Fungsi permintaan kita ubah dalam bentuk $Q = f(P)$ yaitu $P = (5 - Q)^2 \rightarrow Q = 5 - P^{1/2}$. Batas-batas integral daerah arsiran:

Pada $Q_1 = 0$, maka $P_1 = (5 - 0)^2 = 25$

Pada $P_0 = Q_0 = 2$ (titik keseimbangan). Jadi,

$$CS = \int_{P_0}^{P_1} f(P)dP = \int_{9}^{25} 5 - P^{1/2} \;dP$$

$$= 5P - \frac{2}{3}P^{3/2} \Big|_{9}^{25}$$

$$= [125 - 83{,}33] - [5(9) - \frac{2}{9}(9)^{3/2}]$$

$$= [125 - 83{,}33] - [45 - 18]$$

$= 41{,}67 - 27$

$= 14{,}67$ Cocok!

Contoh 32. Diketahui fungsi permintaan $P = 25\text{-}Q$. Hitunglah surplus konsumen CS jika $P_0 = 15$ dan $Q_0 = 10$

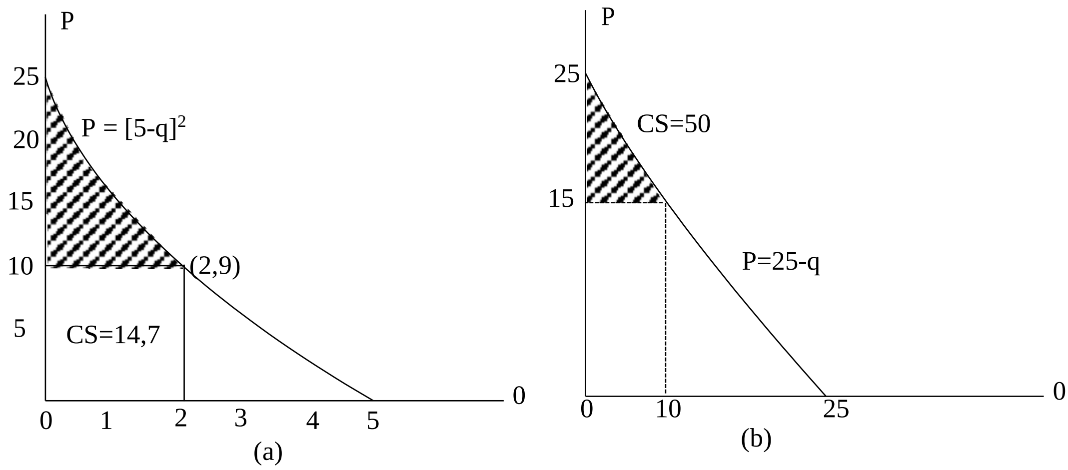
$$CS = \int_{0}^{Q_0} f(Q)dQ - P_0Q_0 = \int_{0}^{10} (25 - Q)\;dQ - (15)(10)$$

$$= 25Q - 0{,}5Q^2 \Big|_{0}^{10} - 150$$

$= [25(10) - 0{,}5(10)^2] - [0] - 150$

$= (250 - 50) - 150$

$= 50$ (Gambar 10.12b)

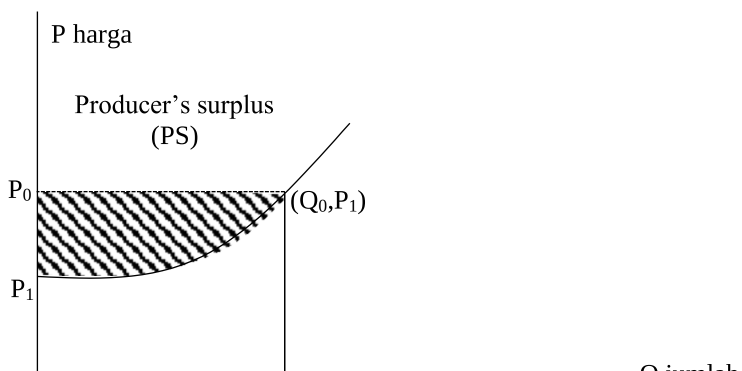


Gambar 10.12. Surplus Konsumen

10.11 SURPLUS PRODUSEN

Suatu fungsi penawaran P = f(Q), menunjukkan jumlah barang yang ditawarkan oleh produsen pada tingkat harga tertetu. Apabila keadaan lainnya tetap, maka jika harga dari suatu barang naik, jumlah keuntungan barang yang ditawarkan akan bertambah karena produsen berusaha menggunakan kesempatan untuk memperbesar. Sebaliknya jika harga turun, jumlah yang ditawarkan akan berkurang karena produsen akan berusaha mengurangi kerugiannya.

Jika keseimbangan dalam pasar terjadi berada pada (Q_0,P_0), maka bagi produsen tertentu yang bersedia menual dengan harga yang lebih tinggi dari P_0 akan merupkan keuntungan baginya karena produsen masih memperoleh keuntungan dengan menjual barangnya pada harga P_0 tersebut. Keuntungan total semacam ini yang disebut surplus produsen (*producer's surplus* atau PS). Dengan kalimat lain, surplus produsen berkenaan dengan tingkat harga pasar P_0 dari barang yang ditawarkan.



Gambar 10.13. Surplus Produsen

Secara geometris, besarnya surplus produsen ditunjukkan oleh luas areal di atas kurva penawaran tetapi di bawah tingkat harga pasar.

$$PS = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} f(Q)dQ \qquad 11-27$$

Seperti halnya pada surplus konsumen, besarnya surplus produsen dapat juga dihitung dari luasan yang ditunjukkan oleh luas kurva fungsi penawaran Q = f(P) yang dibatasi oleh titik-titik (Q_1,P_1) dan titik keseimbangan (Q_0,P_0).

$$PS = \int_{P_1}^{P_0} f(P)dP \qquad 11-28$$

Contoh 33, Diketahui fungsi penawaran $P = Q^2 + 4Q + 4$. Hitunglah surplus produsen (PS) pada harga keseimbangan pasar P = 16.

Keseimbangan harga $P_0 = 16$, $\rightarrow Q^2 + 4Q \quad = 16$

$\rightarrow Q^2 + 4Q \quad = 0$

$\rightarrow (Q – 2)(Q + 6) = 0$

$\rightarrow Q_0 = 2$ dan Q = -6 (tidak dipakai)

Keseimbangan pasar terjadi pada titik (2.16). Jadi,

$$PS = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} f(Q)dQ = 16(2) - \int_0^{2}(Q^2 + 4Q + 4)dQ$$

$$= 32 - (\frac{1}{3} Q^3 + 2Q^2 + 4Q) \Big|_0^2$$

$$= 32 - [(\frac{8}{3} 8 + 8) - 0]$$

$= 13{,}33$ (Gambar 10.14a)

Cara lain :

$P = Q^2 + 4Q + 4 \rightarrow P = (Q + 2)^2$ menjadi $Q = P^{1/2} – 2$

Batas-batas integrase daerah arsiran yaitu:

Pada $Q_1 = 0$, maka $P_1 = (0 + 2)^2 = 4$

Pada $P_0 = 16$, maka $Q_0 = 2$ (titik keseimbangan). Jadi,

$$PS = \int_{P_1}^{P_0} f(P)dP = \int_4^{16} (P^{\frac{1}{2}} - 2)\, dP$$

$$= \frac{2}{3}P^{3/2} - 2P \Big|_4^{16}$$

$$= [\frac{2}{3}(16)^{3/2} - 2(16)] - [\frac{2}{3}(4)^{3/2} - 2(4)]$$

= (42,66 – 32) – (5,333 – 8)

= 13,33 cocok!

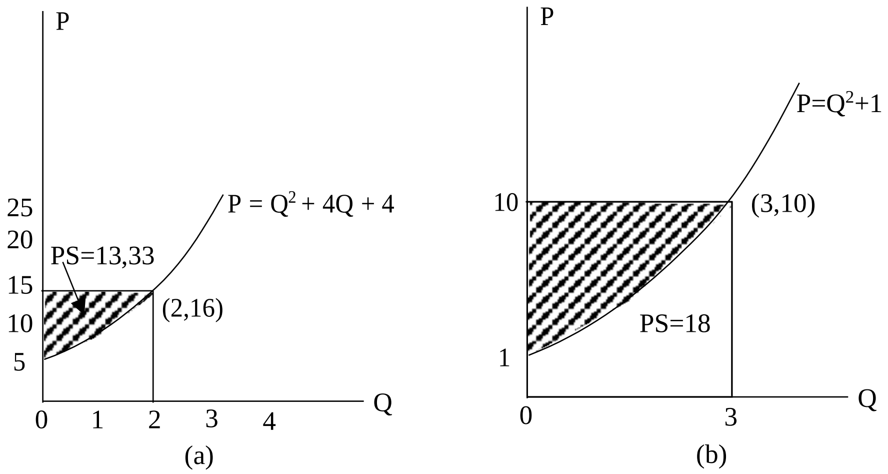
Contoh 34. Diketahui fungsi penawaran $P = Q^2 + 1$. Hitunglah surplus produsen (PS) pada harga keseimbangan pasar $P_0 = 10$ dan $Q_0 = 3$.

$$PS = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} f(Q)dQ = 10(3) - \int_0^3 Q^2 + 1dP$$

$$= 30 - (\frac{1}{3}Q^3 + Q) \Big|_0^3$$

$$= 30 - [9 + 3] - 0$$

= 18   (Gambar 10.14b)



Gambar 10.14 Surplus Konsumen

Contoh 35. Diketahui fungsi permintaan konsumen P = 12 – Q dan fungsi penawaran produsen P = Q + 2 (dimana P harga barang dan Q jumlah barang). Hitunglah surplus konsumen dan surplus produsen pada keseimbangan pasar.

Fungsi Permintaan P = 12 – Q $\rightarrow Q_D = 12 - P$

Fungsi Penawaran P = Q + 2 $\rightarrow Q_S = P - 2$

Syarat keseimbangan: $Q_S = Q_D$

12 – P = P – 2 → 2P = 14 diperoleh P = 7

Pada $P = P_0 = 7$, maka $Q_0 = (7) - 2 = 5$. Jadi,

$$CS = \int_0^{Q_D} f(Q)dQ - P_0Q_0 = \int_0^{5} 12 - QdP - 7(5)$$

$$= 12Q - \frac{1}{2}Q^2 - 35$$

= [(60 – 12,5) – 0] – 35

= 12,5

$$PS = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} f(Q)dQ = 7(5) - \int_0^{5} Q + 2dQ$$

$$= 35 - (\frac{1}{2}Q^2 + 2Q) \Big|_0^5$$

= 35 – [(12,5 + 10) – 0]

= 12,5

Contoh 36. Diketahui fungsi permintaan konsumen P = 20 – Q dan fungsi penawaran produsen P = Q (dimana P harga barang dan Q jumlah barang).

a. Hitunglah surplus konsumen dan surplus produsen sebelum pajak.
b. Hitunglah butir (a) jika setiap barang yang terjual dikenakan pajak t = 2 per unit. Bagaimana kesimpulannya.

a. Sebelum pajak:

   Syarat keseimbangan: $Q_S = Q_D$

   20 – P = P → 2P = 20 diperoleh P = 10 → Q = 10

$$CS = \int_0^{Q_2} f(Q)dQ - P_0Q_0 = \int_0^{10} 20 - QdP - 10(10)$$

$$= 20Q - \frac{1}{2}Q^2 - 100 = [(200 - 50) - 0] - 100$$

   = 50

$$PS = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} f(Q)dQ = 10(10) - \int_0^{10} Q\,dQ$$

$$= 100 - (\frac{1}{2}Q^2) \Big|_0^{10} = 100 - [\frac{1}{2}(10)^2 - 0]$$

   = 100 – 50 = 50

b. Sesudah pajak t = 2 per unit:

Fungsi permintaan: P = 20 – Q

Fungsi penawaran: P = Q + t Q + 2

20 – Q = Q + 2 → 2Q = 18 diperoleh Q=9 →P = 11

$$CS = \int_0^{Q_D} f(Q)dQ - P_0Q_0 = \int_0^{9} (20 - Q)dP - 11(9)$$

$$= 20Q - \frac{1}{2}Q^2 \Big|_0^9 - 99 = [20(9) - \frac{1}{2}(9)^2 - 0] - 99$$

= [(180 – 40,5) – 0] – 99 = 40,5

$$PS = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} f(Q)dQ = 11.9 - \int_0^{9} (Q + 2)dQ$$

$$= 99 - [(\frac{1}{2}Q^2 + 2Q)] \Big|_0^9 = 99 - [1/2(9)^2 + 2(9) - 0]$$

= 99 – [40,5 + 18 – 0] = 40,5

c. Kenaikan pajak sebesar t = 2 per unit akan mengurangi surplus konsumen dan surplus produsen masing-masing sebesar (50-40,5) = 9,5.

Contoh 37. Diketahui fungsi permintaan P = (150 – Q^2) dan fungsi biaya total ditunjukkan sebagai TC = Q^3. Berapakah selisih surplus konsumen (CS) dalam struktur pasar monopoli dan pasar bersaing sempurna pada saat masing-masing meraih keuntungan (π) maksimum?

a. Pasar Monopoli:

Fungsi permintaan: P = 150 – Q^2

Pendapatan total: TR = PQ = (150 – Q^2)Q = 150Q – Q^3

→MR = dTR/dQ = 150 – $3Q^2$

TC = Q^3 →MC = dTC/dQ = $3Q^2$

Keuntungan (π) maksimum pada pasar monopoli yaitu MR = MC

150 – $3Q^2$ = $3Q^3$

150 – $6Q^2$ → Q_0^2 = 150/6 = 25 diperoleh Q_0= √25 = 5 unit

Pada Q_0 = 5 unit, maka P_0 = 150 – $(5)^2$ = 125. Jadi,

$$CS_{monopoli} = \int_0^{Q_0} f(Q)dQ - P_0\,Q_0 = \int_0^{5} 150 - Q^2dQ - (125).5$$

$= [150Q - \frac{1}{3}Q^3 \Big|_0^5 - 625$

$= [150(5) - \frac{1}{3}(5)^3] - 0 - 625$

= 708,33 – 625 = 83,33

b. Pasar Bersaing Sempurna:

$P = MR = 150 – Q^2$ dan $MC = dTC/dQ = 3Q^2$

Keuntugan (π) maksimum pada pasar bersaing sempurna MR = MC

$150 – Q^2 = 3Q^2 \quad \rightarrow 150 = 4Q^2 \rightarrow Q_0^2 = 150/4$

Pada Q_0 = 6,124 unit, $\rightarrow P_0 = 150 – (6,124)^2 = 150 – 37,5$

$= 112,5$

$CS_{bs} = \int_0^{Q_0} f(Q)dQ - P_0Q_0 = \int_0^6 (150 - Q)^2\, dQ - (1125), 124$

$= (150Q - 13Q^3) \Big|_0^{6.124} - 689$

$= [150(6,124) – 1/3(6,124)^3 – 0] – (689)$

$= 306,16$

c. Selisih (Δ) = $CS_{\text{bersaing sempurna}} – CS_{\text{monopoli}}$

= 306,16 – 83,33

= 222,83

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Tentukan integral berikut ini dapat menggunakan substitusi. Biasakan untuk mengecek jawaban anda.

   a. $\int x(x^2 - 2)^2\, dx$

   b. $\int \frac{3(x^2-1)}{x^3-3x}\, dx$

   c. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-36)}}$

   d. $\int 2x(x^2 - 4)^2 dx$

   e. $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

   f. $\int \frac{3(x^2-1)}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$

   g. $\int 5e^{x-1}dx$

   h. $\int e^{(x+3)}dx$

2. Hitunglah hasil integrase dengan menggunakan pengintegralan bagian per bagian untuk integral berikut ini:

a. $\int \frac{12x}{(x+2)^2} dx$

b. $\int \frac{x}{(4+x)^2} dx$

c. $\int x^2 e^{2x} dx$

d. $\int \frac{\text{In} x}{x^2} dx$

e. $\int x^2 . \text{In } x \, dx$

f. $\int e^x . \text{In } x \, dx$

3. Hitunglah integral pecahan berikut:

a. $\int \frac{40}{16-x^2} dx$

b. $\int \frac{6x^2-22x+18}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$

c. $\int \frac{3x^2-(10x+9)}{(x-1)^2(x-2)} dx$

d. $\int \frac{10}{x^2-1} dx$

e. $\int x^2 \sqrt{(x+9)} \, dx$

f. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

4. Diketahui investasi bersih I =8t$^{1/4}$ dan saham modal pada t = 2 adalah 50. Carilah tingkat modal K_t.
5. Tingkat investasi bersih I = 40t$^{1/2}$ dan saham modal pada t = 3 adalah 400. Carilah tingkat modal K.
6. Fungsi produksi marginal tingkat ditunjukkan oleh persamaan MP = 36Q – 3Q^2. Carilah bentuk fungsi produksi total dan produksi rata-ratanya.
7. Diketahui fungsi pendapatan marginal sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan MR = 36 – Q. Carilah fungsi pendapatan total dan fungsi pendapatan rata-rata.
8. Diketahui fungsi produksi marginal MP = 50Q – Q^2. Hitunglah produksi total pada input produksi Q = 10unit.
9. Hitungah pendapatan total jika diberikan fungsi pendapatan marginal MR = 80 – 4Q pada Q = 2 unit dan Q = 10 unit.
10. Biaya marginal suatu perusahaan sepatu dicerminkan oleh MC = 150 + 4Q – Q^2. Jika biaya tetap FC = 50. Hitunglah biaya total, biaya rata-rata dan biaya variabel pada saat Q = 8 unit dan Q = 10 unit.
11. Diketahui fungsi biaya marginal dicerminkan dengan persamaan MC = 40e^{0,5Q} dan biaya tetap FC = 40. Carilah biaya totalnya.
12. Hitunglah tingkat keputusan (utilitas) total konsumen, jika diketahui utilitas marginal MU = 100 – 2Q.

13. Kecenderungan marginal mengkonsumsi ditunjukkan oleh MPC = dC/dY. Jika diketahui MPC = 0,50 dan konsumsi sebesar C = 250 pada pendapatan nol, carilah fungsi konsumsinya.
14. Kecenderungan marginal untuk menabung ditujukkan oleh dS/dY = 8 + $0{,}4Y^{0,3}$. Terdapat tabungan sebesar 80 jika pendapatan keseimbangan 10.000. carilah fungsi tabungan,fungsi konsumsi dan hitunglah besar konsumsi masyarakat pada tingkat pendapatan tersebut.
15. Hitunglah luas areal di bawah kura f(x) dan sumbu-X:
    a. $f(x) = x^2 + 3$ pada batas-batas x = 1 dan x = 3
    b. $f(x) = x^2 – 4$ pada batas-batas x = 2 dan x = 5
    c. $f(x) = 144 – x^2$ pada batas-batas x = 0 dan x = 12
    d. $f(x) = x^2$ pada batas-batas x = 3 dan x = 0
16. Hitunglah luas areal diantara dua kurva f(x) dan g(x):
    a. $f(x) = 121 – x^2$ dan $g(x) = 4x + 44$ untuk x = 0 dan x = 7
    b. $f(x) = 28 – x^2$ dan $g(x) = 3$ untuk x = -5 dan x = -5
    c. $f(x) = 20$ dan $g(x) = 16 – x^2$ untuk x = 1 dan x = 5
    d. $f(x) = 25 – x$ dan $g(x) = 5$ untuk x = 1 dan x = 8
17. Evaluasi integral semu di bawah ini:
    a. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x+9}$ dx
    b. $\int_{\infty}^{5} \frac{10}{x^2}$ dx
    c. $\int_0^{49} \frac{2}{\sqrt{(49-x)}}$ dx
    d. $\int_{-\infty}^{0} 4xe^{2x}dx$
    e. $\int_{-\infty}^{0} 6e^{x}dx$
    f. $\int_{-\infty}^{0} \frac{4}{4-x}$ dx5
18. Hitunglah integral $\int_0^4 x^5dx$ dengan cara:
    a. Eksak
    b. Aturan Trapesium
    c. Aturan Simpson
    d. Aturan Titik Tengah
    e. Ekspansi Taylor.
19. Ulangi soal-18 untuk integral $\int_{0^x}^{4^3} 2x^2 + x - 5$ dx
20. Fungsi permainan barang dicerminkan oleh persamaan $P = 36 – 12Q – Q^2$. Jika keseimbangan pasar terjadi pada harga P = 16, hitunglah surplus konsumen (CS).

21. Seperti soal-20. Diketahui fungsi permintaan P = 40 – Q, jika P_0 = 27 dan Q_0 = 4.
22. Diketahui fungsi penawaran P = Q^2 + 4. Hitunglah surplus produsen (PS) pada harga keseimbangan pasar P_0 = 20 dan Q_0 = 4.
23. Seperti soal 22. Diketahui fungsi penawaran P = Q^3 jika P_0 = 27 dan Q_0 = 3.
24. Fungsi permintaan konsumen P = 16,5 – Q dan fungsi penawaran produsen P = 0,5Q^3 (dimana P harga barang dan Q jumlah barang). Hitunglah surplus konsumen dan surplus produsen pada keseimbangan pasar.
25. Diketahui fungsi permintaan P = 40 – Q dan fungsi biaya total ditunjukkan sebagai TC = Q^2 + 5. Berapakah selisih surplus konsumen (CS) dalam struktur pasar monopoli dan pasar bersaing sempurna pada saat masing-masing meraih keuntungan maksimum?
26. Diketahui fungsi permintaan suatu barang P = 40 – Q dan fungsi penawarannya ditunjukkan oleh P = 3Q, dinyatakan:
    a. Hitunglah surplus konsumen (CS) dan surplus produsen (PS).
    b. Seperti butir (a), jika pemerintah mengenakan pajak sebesar 2 perunit terhadap barang yang dijual.
    c. Bagaimana kesimpulan anda.
27. Diketahui, sebuah fungsi permintaan barang dicerminkan oleh persamaan P = 200 – Q dan fungsi penawarannya ditunjukkan dengan P = 3Q (dimana P dan Q masing-masing menyatakan harga barang dan jumah barang).
    a. Hitunglah surplus konsumen dan surplus produsen.
    b. Hitung kembali surplus konsumen (CS) dan surplus produsen (PS) jika setiap barang yang terjual pemerintah melakukan kebijaksanaan subsidi sebesar s = 2 per unit
28. Kerjakan kembali seperti soal-27. Jika diketahui fungsi permintaan barang ditunjukkan oleh P = 29 – Q dan penawarannya dinyatakan sebagai fungsi P = 2Q + 2.
29. Diketahui fungsi permintaan konsumen dinyatakan sebagai P = 140 – Q dan biaya total ditunjukkan dalambentuk TC = Q^2. Hitunglah selisih surplus konsumen dalam: (a) pasar monopoli dan (b) pasar bersaing sempurna pada saat masing-masing meraih keuntungan maksimum?

30. Kerjakan kembali seperti soal-29. Jika dikethaui fungsi permintaan barang ditunjukkan oleh persamaan $P = 60 - 2Q$ dan fungsi biaya total dinyatakan dalam persamaan $P = 2Q$.

BAB XI
MATRIKS

11.1 NOTASI DAN ORDO SUATU MATRIKS

Matriks adalah sekumpulan bilangan, parameter atau variabel yang disusun menjadi suatu jajaran persegi panjang yang terdiri atas baris-baris dan kolom-kolom. Bilangan, parameter atau variabel yang menyusun baris dan kolom matriks itu disebut unsur-unsuratau *elemen-elemen* matriks. Banyaknya baris (m) dan kolom (n) menentukan dimensi suatu matriks (*m x n*).

Secara umum penulisan suatu matriks yang mengandung *m* baris dan *n* kolom dapat dilambangkan dengan menggunakan salah satu dari lima notasi berikut ini:

$$A_{mxn} = A(m \times n) = \underset{m \times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{mXn} \qquad (11-1)$$

Elemen baris ke-*i* dan kolom ke-*j* matriks A dilambangkan oleh a_j. tidak ada tanda baca yang memisahkan elemen-elemen suatu matriks. Elemen-elemen tersebut semuanya mempunyai subkript ganda, yang pertama menunjukkan baris dimana elemen tersebut berada dan yang kedua menunjukkan kolomnya. Jadi, elemen a_{11} adalah elemen yang berada pada baris pertama, kolom pertama; a_{21} adalah elemen yang berada pada baris kedua, kolom pertama; a_{m3} adalah elemen yang berada pada baris ke-m, kolom ketiga.

Jenis-jenis matriks dapat dipandang dari segi hubungan yang terdapat antara banyaknya baris dan kolom matriks ini. dalam matriks bujur sangkar A_{mxn} jumlah baris sama dengan jumlah kolom (m = n). Matriks yang demikian disebut suatu *matriks persegi berordo n*.

Suatu matriks persegi dengan nilai *m* = *n* = *1*, elemen matriks itu hanya satu dan sekaligus merupakan baris dan kolomnya. Matriks (*1 x 1*) ini disebut suatu *scalar*. Jika matriks terdiri dari suatu baris dengan dimensi (1 x n), maka matrks tersebut adalah *vector baris*. Sedangkan matriks yang terdiri dari satu satu kolom tunggal sedemikian rupa sehingga dimensinya (m x 1) disebut *vector kolom*.

$$A_{1x3} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} = a' \qquad B_{5x1} = \begin{bmatrix} 21 \\ 31 \\ 6 \\ 41 \\ 27 \end{bmatrix} = b$$

Untuk lambang vector lazimnya tidak digunakan huruf capital melainkan huruf kecil yang dicetak tebal. Karena merupakan vector, maka matriks A dan B di atas dituliskan a' dan b. Lambang vector baris diberi tanda petik tunggal diatasnya.

Perhatikan matriks A dibawah ini:

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 8 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks ini dapat disekat menjadi tiga baris seperti berikut ini:

$$A_{3x3} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ \hline 6 & 9 & 8 \\ \hline 7 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

Misalkan bahwa $a_1' = [1\ 2\ 5]$, $a_2' = [6\ 9\ 8]$ dan $a_3' = [7\ 3\ 2]$, maka penyekatan menjadi tiga baris itu sesungguhnya telah menyekat matriks A menjadi tiga vector baris yaitu,

$$A_{3x1} = \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix}$$

Demikian pula matriks tersebut dapat disekat menurut kolomnya:

$$A_{3x3} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 8 \\ 7 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

Kemudian dapat dibuat menjadi:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Maka penyekatan menjadi tiga kolom itu sesungguhnya telah menyekat matriks A menjadi tiga vector kolom yaitu: $A = [a_1\ a_2\ a_3]$.

11.2 BENTUK-BENTUK MATRIKS

Sebelumkita mempelajari matriks lebih jauh, marilah kita memahami berbagai bentuk matriks yang berkenaan dengan elemen-elemen yang dikandungnya. Bentuk-bentuk khas matriks dapat dilihat yang mengurutkan elemen baris pertama kolom pertama ke elemen baris terakhir kolom terakhir.

11.2.1 Matriks Diagonal

Matriks persegi berordo-n dapat terjadi jika semua elemen kecuali yang ada pada diagonal bernilai nol. matriks seperti ini disebut *matriks diagonal*, dapat dituliskan $D_n = [d_{ii}]_n$. $(11-2)$

Contoh 1.

$$D_3 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D_3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

11.2.2 Matriks Satuan

Jika seluruh diagonalnya sama dengan satu maka matriks tersebut disebut *matriks satuan* atau *matriks identitas* I_0. Matriks Identitas adalah suatu matriks bujur sankar yang mempunyai 1 untuk setiap elemen pada diagonal utama dan nol untuk setiap elemen yang lain. Matriks identidas sama dengan bilangan 1 dalam aljabar karena perkalian suatu matriks dengan matriks identitas tidak membawa perubahan pada matriks asal.

Contoh 2

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11.2.3 Matriks Null

Matriks null yang terdiri dari semua elememennya nol dan dapat berdimensi sembarang. Penjumlahan atau pengurangan matriks null tidak membawa perubahan terhadap suatu matriks. Sedangkan pengalian suatu matriks dengan matriks null akan menghasilkan matriks null.

Contoh 3.

$$N_{5x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N_{5x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11.2.4 Matriks Transpos

Matriks yang mengkonversikan suatu matriks lain yang sudah ada sebelumnya, dimana elemen-elemen baris matriks menjadi kolom dan kolom matriks menjadi baris disebut *transpos*. Matriks transpos biasanya dituliskan dengan menambahkan tanda aksen (A' atau A^T) pada matriks aslinya.

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1a} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ml} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ transposnya} \rightarrow A^T_{nxm} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Contoh 4.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \text{ matriks transposnya: } A^T \begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

11.2.5 Matriks Simetri

Matriks simetri adalah matriks bujur sangkar yang sama dengan transponsnya. Dengan demikian, matriks A dikatakan simetri apabila A = A^T.

Contoh 5.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Untuk matriks simetri miring adalah matriks bujur sangkar yang sama dengan negatif transponsnya. Dengan demikian, matriks A dikatakan simetri apabila A = -A^T.

Contoh 6.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -7 \\ -4 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 4 & 0 & 1 \\ -7 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow -A^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -7 \\ -4 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

11.2.6 Matriks Invers

Matriks invers adalah matriks yang apabila dikalikan dengan matriks bujur sangkar menghasilkan matriks satuan. Jika A matriks bujur sangkar, maka inversnya dituliskan dengan notasi A^{-1} dan $AA^{-1} = 1$.

Contoh 7

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & -0{,}65 & 0{,}05 \\ -0{,}40 & 0{,}60 & -0{,}20 \\ -0{,}60 & 0{,}45 & 0{,}20 \end{bmatrix}$$

11.3 OPERASI-OPERASI MATRIKS

11.3.1 Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Penjumlahan dan (pengurangan) dua matriks dapat mengikuti kaidah penjumlahan untuk bilangan nyata asal saja pada penjumlahan (pengurangan) matriks yang dijumlhakan (dikurangkan) adalah elemen-elemennya. Dengan demikian pada penjumlahan/pengurangan matriks mengharuskan matriks-matriks tersebut berdimensi/berordo sama. Jadi, a_{11} dalam A akan ditambahkan ke (dikurangkan dari) b_{11} dalam B; a_{12} ke b_{12} dan seterusnya:

Contoh 8.

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} (8+1) & (1+5) & (7+2) \\ (2+7) & (3+4) & (1+2) \\ (3+4) & (5+4) & (0+2) \end{bmatrix} (3x3) = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 9 \\ 9 & 7 & 3 \\ 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} (3x3)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} (8-1) & (1-5) & (7-2) \\ (2-7) & (3-4) & (1-2) \\ (3-4) & (5-4) & (0-2) \end{bmatrix} (3x3) = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 5 \\ -5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} (3x3)$$

11.3.2 Perkalian Skalar dan Vektor

Perhatikan suatu penjumlahan matriks yang sama berulang-ulang. Misalkan matriks M dijumlahkan tiga kali, maka matriks hasilkan sama dengan 3M seperti contoh berikut ini:

Contoh 9. Hasil perkalian scalar kM, apabila diketahui k = 3 dan

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ dapat diperlihatkan bahwa:}$$

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 3(8) & 3(7) \\ 3(2) & 3(1) \\ 3(3) & 3(4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 & 21 \\ 6 & 3 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Hasil matriks baru yang diperoleh dari matriks M elemennya digandakan sebanyak k kali (k = 3). Kenyataan ini dapat dikembangkan untuk sembarang bilangan nyata k. konstanta ini disebut suatu scalar.

Perkalian vector baris A dengan vekotr kolom B mensyaratkan masing-masing vector mempunyai jumlah elemen yang sama, hasil kalinya diperleh dengan mengalikan elemen-elemen individu dari vector baris dengan elemen-elemen yang bersesuaian dalam vector kolom dan menjumlahkan hasilnya.

Secara umum perkalian vector baris a' berukuran 1xn terhadap vector kolom b berukuran nx1 dan dibaca "*vector a aksen kali vector b*".

Contoh 10.

$$\mathrm{a}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}_{(1\mathrm{x}5)} \text{dan } \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{a}'\mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

= [(1x1) + (3x3) + (5x5) + (7x7) + (9x9)] = 165

11.3.3 Perkalian Matriks

Hasil perkalian vector baris ukuran (1 x n) terhadap vektor kolom berukuran (n x 1) ialah suatu scalar berukuran (1 x 1). Suatu pengujian untuk melihat adanya persesuaian yang akan diterapkan sebelum melakukan setiap perkalian matriks adalah dengan menata dua pasang dimensi tersebut dimana matriks-matriks tersebut akan dikalikan. Perhatikan bahwa ukuran (1 x 1) ini dapat diturunkan dari penggandengan (1 x n) dengan (n x 1) yaitu (1 x n < = > n x 1) kemudian menandai bilangan terakhir dari pasang pertama dan bilangan pertama dari pasangn kedua. Jika keduanya sama maka perkalian matriks dapat didefinisikan dan bilangan-bilangan yang tidak ditandai akan menunjukkan hasil perkalian matriks yang bersangkutan.

Hasil kali dua buah matriks A_{mxn} dengan B_{nxp} adalah sebuah matriks baru C_{mxp} yang elemen-elemennya merupakan perkalian silang elemen-elemen kolom matriks B.

A_{mxn} x B_{nxp} = C_{mxp} 11-3

Contoh 11.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{(3x2)} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{(2x3)}$$

2 = 2

ordo matriks baru 3 x 3

$$A_{3x2} \text{ x } B_{2x3} = C_{3x3} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1(1) + 2(2) = 5$

$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 1(0) + 2(1) = 2$

$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} = 1(3) + 2(4) = 11$

$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 2(1) + 1(2) = 4$

$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 2(0) + 1(1) = 1$

$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} = 2(3) + 1(4) = 10$

$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} = 3(1) + 4(2) = 11$

$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} = 3(0) + 4(1) = 4$

$c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} = 3(3) + 4(4) = 25$

$$A_{3x2} \text{ x } B_{2x3} = C_{3x3} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 11 \\ 4 & 1 & 10 \\ 11 & 4 & 25 \end{bmatrix}_{(3x3)}$$

11.4 MATRIKS PERBESARAN DAN METODE GAUSS UNTUK PENYELESAIAN PERSAMAAN LINEAR

Matriks perbesaran (*augmented*) sangat bermanfaat untuk menyelesaikan persamaan linear yang terdiri dari n persamaan dalam n bilangan anu. Suatu persamaan linear dapat diubah dalam bentuk matriks AX = B yaitu sebuah matriks perbesaran yang dinyatakan sebagai A|B dimana matriks koefisien A dengan vektor kolom konstanta B diletakkan digandengkan dan dipisahkan dengan satu garis atau kisi.

Suatu persamaan linear yang terdiri dari n persamaan dalam n bilangan anu dapat dituliskan sebagai berikut:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ….. + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ….. + a_{2n}x_n = b_2$

$a_{21}x_1 + a_{32}x_2 + ….. + a_{3n}x_n = b_3$

………………………………..

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ….. + a_{nn}x_n = b_n$

Matriks perbesaran A|B yaitu:

$$A|B = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} & b_1 \\ a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n} & b_2 \\ a_{31} + a_{32} + \dots + a_{3n} & b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \qquad 11-4$$

Penerapan metode Gauss yang berkaitan dengan suatu matriks perbesaran dapat juga diterapkan untuk menyelesaikan persamaan linear seperti di atas. Penyelesaian ini tidak lain adalah mengoperasikan baris berulang-ulang pada matrik perbesarannya sampai matrik koefisien A disederhanakan menjadi matriks identitas.

Untuk mengubah matriks perbesaran menjadi matriks identitas: pertama, mengubah a_{11} menjadi 1 pada matriks nol pada kolom pertama. Kedua, mengubah a_{22} menjadi 1 pda matriks koefisien dan mengoperasikan baris untuk mendapatkan nol pada kolom keduanya. Selanjutnya melakukan operasi-operasi pada a_{13},…., a_{nn} menjadi 1 dan melakukan operasi-operasi baris dengan menyelesaikan kolom-kolomnya menjadi nol. Kondisi akhir akan tercapai jika matriks A menjadi matriks identitas.

Contoh 12. Selesaikan persamaan linear di bawah ini dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

$4x_1 + 8x_2 = 28$

$6x_1 + 5x_1 = 28$

Persamaan linear akan dinyatakan sebagai matriks perbesaran:

$$A|B = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 8 & 28 \\ 6 & 5 & 28 \end{array}\right]$$

1. Kalikan baris pertama dengan ¼ untuk mendapatkan 1 pada posisi a_{11}.

   $$A|B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 28 \end{array}\right]$$

2. Kurangkan 6 kali baris pertama pada baris kedua.

   $$A|B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -7 & 14 \end{array}\right]$$

3. Kalikan baris kedua dengan (-1/7) untuk mendapatkan 1 pada posisi a_{22}.

   $$A|B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

4. Kurangkan 2 kali baris kedua pada baris pertama.

   $$A|B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

5. Penyelesaian diperoleh: $x_1 = 3$ dan $x_2 = 2$.

Contoh 13. Selesaikan persamaan linear dibawah ini dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

$$4x_1 + 4x_2 + 8x_1 = 36$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14$$

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

Persamaan linear akan dinyatakan sebagai matriks perbesaran:

$$A|B = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 8 & 36 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

1. Kalikan baris pertama dengan 1/4 untuk mendapatkan 1 pada posisi a_{11}.

   $$A|B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

2. Kurangkan 1 kali baris pertama pada baris kedua dan kurangkan 4 kali baris pertama pada baris ketiga.

   $$A|B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -27 \end{array}\right]$$

3. Kurangkan 1 kali baris kedua pada baris pertama dan tambahkan 3 kali baris kedua pada baris ketiga.

   $$A|B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right]$$

4. Kalikan baris ketiga dengan -1/4 untuk mendapat 1 pada posisi a_{11}.

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

5. Kurangkan 1 kali baris ketiga pada baris kedua dan kurangkan 1 kali baris ketiga pada baris pertama.

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

6. Penyelesaian diperoleh $x_1 = 1$ $x_2 = 2$ dan $x_5 = 3$.

11.5 DETERMINAN MATRIKS

Determinan merupakan sebuah bilangan tunggal atau scalar dan hanya dijumpai pada matriks bujur sangkar. Determinan suatu matriks sering ditulis dengan dua garis tegak $|A| = 0$ disebut *matriks singular* yaitu matriks yang sedikitnya satu baris (kolom) merupakan kelipatan/kesebandingan dari satu baris (kolom) lainnya.

11.5.1 Determinan Matriks Ordo 2 x 2

Determinan $|A|$ dari matriks yang paling sederhana ordo-2 dapat diperoleh dengan mengambil hasil kali dari kedua elemen pada diagonal utama dikurangi dengan hasil dari kali dari kedua elemen di luar diagonal utamanya.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \text{determinan} |A| = a_{12}a_{22} \qquad 11 - 5$$

Contoh 14. Tentukan determinan matriks-matriks ordo-2 dibawah ini:

a. $A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

Determinan $|A|$= 8(8) – 6(7) = 64 – 42 = 22

Karena $|A| \neq 0$, matriks tersebut disebut matriks non-singular.

b. $B = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Determinan $|B|$= 2(1) – 9(3) = 2 – 27 = 25

Karena $|B| \neq 0$, matriks tersebut disebut matriks non-singular.

c. $C = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$…….

Determinan $|C|$= 4(5) – 10(2) = 20 – 20 = 0

Karena $|C| \neq 0$, maka matriks tersebut disebut matriks singular karena secara linear tergantung. Perhatikan bahwa baris-1 merupakan kelipatan 2 kali baris-2 atau kolom-2 merupakan kelipatan 2 kali kolom-1.

11.5.2 Determinan Matriks Ordo 3 x 3

Untuk mencari nilai numeris determinan suatu matriks ordo 3 x 3 dapat dilakukan metode *Sarrus*.

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|A| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{23}\,a_{32} - (a_{13}\,a_{22}\,a_{33} + a_{11}\,a_{23}\,a_{32} + a_{12}\,a_{21}\,a_{33}) \qquad 11\text{-}6$$

Contoh 15. Hitunglah determinan matriks-matriks di bawah ini:

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{matrix}$$

$= [(1.1.6) + (2.1.2) + (3.1.4)] – [(3.1.2) + (1.1.4) + (2.1.6)] = 0$

b. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

$$|B| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{matrix}$$

$= [(1.1.6) + (2.1.2) + (0.1.4)] – [(0.1.2) + (1.1.4) + (2.1.6)] = -6$

11.6 EKSPANSI LAPLACE

Penyelesaian determinan matriks dengan cara seperti di atas hanya berlaku untuk matriks yang berdimensi tiga dan sangat rumit untuk menerapkan pada matriks ordo yang lebih tinggi. Berkaitan dengan ini, Laplace telah berhasil menemukan cara penyelesaian determinan dan berlaku umum pada matriks berordo-n. Laplace memperkenankan penggunaan minor dan kofaktor dari determinan yang bersangkutan.

Perhatikan kembali penyelesaian determinan ordo-3 di atas:

$|A| = (a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{33} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32})$ –

$(a_{13}\, a_{22}\, a_{31} + a_{11}\, a_{23}\, a_{32} + a_{12}\, a_{23}\, a_{33})$

Penulisan ini dapat diubah menjadi:

$|A| = (a_{11}\, a_{12}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} + a_{12}\, a_{21}\, a_{31})$ –

$(a_{13}\, a_{21}\, a_{33} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31})$

$= a_{11}\,(a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}) + a_{12}\,(a_{23}\, a_{31} - a_{21}\, a_{33}) +$

$a_{13}\,(a_{21}\, a_{32} - a_{22}\, a_{31})$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| - a_{13}|M_{13}|$$

$$= \sum_{i,j}^{n} a_{ij}\, |M_{ij}|$$

Determinan $|A|$ ternyata teridir dari beberapa sub-determinan. Sub-determinan sub determinan ini disebut *minor* yang dinotasikan dengan $[M_{ij}]$. Minor $[M_{ij}]$ adalah minor dari elemen a_{11}, $[M_{11}]$ adalah minor dari elemen a_{11} yang diperoleh dengan cara menghilangkan baris-1 dan kolom 1 dari determinan $|A|$. Begitu juga untuk minor-minor yang lainnya.

Penulisan determinan dalam bentuk minor dapat diubah menjadi penulisan dalam bentuk *Kofaktor*. Notasi dari kofaktor adalah $|C_{ij}|$. Hubungan minor dan kofaktornya dituliskan:

$$|C_{11}| = (-1)^{1+1}|M_{11}| = (-1)^{2}|M_{11}| = +|M_{11}|$$

$$|C_{12}| = (-1)^{1+2}|M_{12}| = (-1)^{3}|M_{12}| = +|M_{12}|$$

$$|C_{13}| = (-1)^{1+3}|M_{13}| = (-1)^{4}|M_{13}| = +|M_{13}|$$

$$|C_{ij}| = (-1)^{i+j}|M_{ij}| \qquad 11-8$$

Kofaktor $|C_{ij}|$ tidak lain adalah minor $|M_{ij}|$ yaitu jika penjumlahan i+j menghasilkan bilangan genap dan $|C_{ij}|$ negatif dari minor $|M_{ij}|$ apabila i+j menghasilkan bilangan ganjil. Dengan demikian ekspansi Laplace dari suatu determinan ordo tiga dapat dinyatakan sebagai:

$$|A| = a_{11}|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}|$$

$$|A| = \sum_{i+j}^{n} a_{ij}\,|C_{ij}| \qquad 11-9$$

Ekspansi Laplace memungkinkan juga untuk perhitungan determinan sepanjang baris maupun kolom sembarang. Penilaian baris atau kolom yang angka nol-nya lebih banyak akan mempermudah penghitungan determinannya.

Contoh 16. Hiunglah determinan matriks dibawah ini:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinan dicari dengan ekspansi Laplace sepanjang baris-2

$|A| = a_{21}|C_{21}| + a_{22}|C_{22}| + a_{23}|C_{23}|$

Karena a_{22} = 0, determinannya adalah $|A| = a_{22}|C_{22}| + a_{23}|C_{23}|$. Dengan demikian kita cukup mencari kofaktur $|C_{22}|$ dan $|C_{33}|$ saja, yaitu:

$$|C_{22}| = (-I)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = +1[1(0) - 3(2)] = -6$$

$$|C_{23}| = (-I)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = +1[1(5) - 2(2)] = -1$$

Dengan mensubstitusikan hasil kofaktor-kofaktor tersebut maka:

$$|A| = 1(-6I)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1[1(5) - 22(2)] = -1$$

Untuk mengecek jawaban ini, marilah kitahitung kembali determinan dengan ekspansi Laplace sepanjang kolom-3:

$$|A| = a_{11}|C_{11}| + a_{22}|C_{22}| + a_{33}|C_{33}|$$

Karena a_{33} = 0, derminannya menjadi $|A| = a_{31}|C_{31}| + a_{32}|C_{32}|$. Kofaktor-kofaktor yang dicari adalah $|C_{11}|$ dan $|C_{32}|$.

$$|C_{11}| = (-I)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = +1[0(5) - 1(2)] = -2$$

$$|C_{12}| = (-I)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = +1[1(5) - 2(2)] = -1$$

Dengan mensubstitusikan hasil kofaktor-kofaktor tersebut maka:

$|A| = 3(-2) + I(-1) = -7$ cocok!

11.7 SIFATSIFAT DETERMINAN

Ada 8 (delapan) sifa-sifat deteminan berikut ini yang dapat memberikan cara-cara penyederhanaan untuk mengevaluasi dan menyelesaikan suatu determinan.

1. Determinan dari suatu matriks sama dengan determinan dari transposnya $|A| = |A'|$.
2. Nilai determinan berubah tanda tetapi nilai absolutnya tetap jika terjadi penukaran tempat antara dua baris atau kolom sembarang.
3. Penambahan atau pengurangan suatu kelipatan bukan nol dari satu baris (kolom) dari baris (kolom) lainnya tidak berpengaruh pada determinan.
4. Pengalian elemen dari baris (kolom) dengan suatu konstanta nilai determinannya sama dengan perkaliannya dengan konstanta tersebut.
5. Jika eleme-elemen pada salah satu baris atau kolomnya nol maka determinannya adalah nol.
6. Jika dua baris atau kolom mempunyai hubungan kesebandingan yaitu secara linear saling tergantung, determinannya adalah nol.
7. Jika determinan dari suatu matriks sama dengan nol, maka matriks tersebut tidak mempunyai balikan (invers). Bila $|A| = 0$, matriks A adalah matriks singular dan A^{-1} tidak ada.
8. Jika deteminan dari suatu matriks tidak sama dengan nol, maka matriks tesebut mempunyai balikan (invers). Bila $|A| \neq 0$, matriks A adalah matriks non singular dan A^{-1} ada.

11.8 ADJOINT MATRIKS

Adjoint suatu matriks adalah transpos dari matriks kofaktornya. Sedangkan matriks kofaktor adalah matriks dimana setiap elemen a_{ij} digantikan dengan kofaktornya $|C_{ij}|$.

$$C = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| & |C_{13}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & |C_{23}| \\ |C_{31}| & |C_{32}| & |C_{33}| \end{bmatrix} \rightarrow \text{Adj.}\,A = C' = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & |C_{31}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & |C_{32}| \\ |C_{13}| & |C_{23}| & |C_{33}| \end{bmatrix} \qquad 11-10$$

Contoh 17. Tentukan matriks kofaktor C dan matriks adjoint A serta determinan dari matriks di bawah ini.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Denganmenukar tempat antara elemen-elemen a_j dengan kofaktornya $[C_{ij}]$ menurut hukum kofaktor, maka:

$$C = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 10 & 1 & -4 \\ -5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Matriks adjoint A adalah transpos dari C yaitu:

$$\text{Adj. } A = C' = \begin{bmatrix} 1 & 10 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Deterrminan matriks tersebut adalah:

$|A| = 2(1) + 0(1) + 5(-1) = -3$ (penyelesaian menurut baris -1) atau $|A| = 0(10) + 1(1) + 1(-4) = -3$ (penyelesaian menurut baris -2) atau

$|A| = 1(-5) + 2(-2) + 3(2) = -3$ (penyelesaian menurut baris -3).

11.9 KAIDAH CRAMER

Kaidah Cramer memberika kemudahan dalam penyelesaian persamaan-persamaan linear simultan yang melibatkan determinan. Beberapa persamaan linear simultan yang terjadi dari m persamaan dalam n variabel keputusan dapat disajikan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_2$

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_3$

……………………………………….......

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m$

dapat ditulis sebagai, $A_{mxn}\, x_{nx1} = b_{mx1}$.

Jika matriks A merupakan matrik bujur sangkar (m = n) yang non-singular atau mempunyai invers, maka persamaan linear simultan tersebut dapat disajikan dalam bentuk $A_{mxn}\, x_{nx1} = b_{nx1}$.

Bentuk lain persamaan linear simultan tersebut dapat juga dinyatakan sebagai berikut:

$$x_{nx1} = \frac{\mathbf{x}_{nx1}}{A_{nxn}} \qquad 11-11$$

Untuk mencari variabel keputusan x_1 dari persamaan linear simultan dapatdilakukan dengan membagi determinan koefisien matriks atau setelah kolom ke-i diganti kolom konstanta pada ruas kanan dibagi dengan determinan koefisien matriks yang bersangkutan.

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{|A_1|}{|A|} \qquad X_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_1 & \dots & a_{1n} \\ b_{23} & a_{22} & a_2 & \dots & a_{2n} \\ b_{33} & a_{32} & a_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & a_{n2} & a_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{|A_3|}{|A|}$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_{13} & a_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_{23} & a_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ b_{33} & a_3 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{|A_1|}{|A|} \qquad X_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_{13} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_1 \\ b_{23} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_2 \\ b_{33} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{|A_n|}{|A|}$$

Secara umum dapat ditulis $x = \frac{|A_1|}{|A|}$ i = 1,2,3 ….. n 11-12

Contoh 18. Hitunglah nilai variabel keputusan dari persamaan-persamaan linear simultan dengan kaidah Cramer.

$7x_1 + 4x_2 = 26$

$9x_1 – 2x_2 = 12$

a. Nyatakan persamaan tersebut dalam bentuk matriks: AX = B

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 12 \end{bmatrix}$$

b. Determinan matriksnya $|A| = 7(-2)4(9) = -50$

c. Carilah x_1 dengan menggantikan kolom-1 dengan vector kolom B yang akan membentuk matriks baru A_1.

$A_1 \begin{bmatrix} 26 & 4 \\ 12 & -2 \end{bmatrix}$ determinan $[A_1]$ = 26(-2) -4(12) = -100

Penyelesaian dengan kaidah Cramer: $x_1 = \frac{[A_1]}{[A]} = \frac{-100}{50} = 2$

d. Carilah x_2 dengan menggantikan kolom 2 dengan vector kolom B yang akan membentuk matriks baru A_2.

$A_2 = \begin{bmatrix} 7 & 26 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$ determinan $|A_2| = 7(12) - 26(9) = -150$

Penyelesaian dengan kaidah Cramer: $x_2 = \frac{[A_2]}{[A]} = \frac{-150}{-50} = 3$

Jadi, variabel-variabel yang dicari adalah $x_1 = 2$ dan $x_2 = 3$

Contoh 18. Selesaikan persamaan-persamaan linear simultan berikut ini dengan kaidah Cramer.

$$x + 2y + 4x = 32$$
$$4x + 2y = 30$$
$$2x + 3y + z = 13$$

a. Nyatakan persamaan tersebut dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 30 \\ 13 \end{bmatrix}$$

b. Determinan-determinannya adalah:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(2-0) - 2(4-0) + 4(12-4) = 26$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 2 \\ 18 & 2 & 2 \\ 14 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 12(0) - 1(36-28) + 2(36-28) = 8$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 2 \\ 4 & 18 & 2 \\ 2 & 14 & 2 \end{vmatrix} = 2(36-28) - 1(8-4) + 2(56-36) = 8$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 4 & 2 & 18 \\ 2 & 2 & 14 \end{vmatrix} = 2(28-36) - 1(56-36) + 12(8-4) = 12$$

c. Dengan menggunakan kaidah Cramer penyelesaian persamaan linear simultan tersebut adalah:

$x = \frac{[A_1]}{[A]} = \frac{8}{4} = 2$ $\quad y = \frac{[A_2]}{[A]} = \frac{8}{4} = 2$ $\quad z = \frac{[A_3]}{[A]} = \frac{12}{4} = 3$

11.10 INVERS MATRIKS

Menginversikan suatu matriks artinya mencari matriks suatu matriks yang apabila digandakan dengan matriks bujur sangkar akan menghasilkan matriks satuan. Notasi matriks invers seperti yang telah disinggung pada pasal sebelumnya dituliskan A^{-1}. Dengan demikian, suatu matriks non singular A – (hanya matriks yang determinannya tidak sama dengan nol) – adalah suatu matriks yang memenuhi hubungan $AA^{-1} = 1$.

11.10.1 Invvers Matriks Ordo 2 x 2

Jika diketahui matriks B merupakan invers dan matriks A, maka untuk membentuk matriks B haruslah dicari lebih dahulu elemen-elemen penyusunannya atau b_{ij} seperti uraian berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ Inversnya adalah } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Mengincar AB = 1 maka

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{23} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} = 1 \qquad a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} = 0$

$a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} = 0 \qquad a_{21}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22} = 1$

Dengan menyelesaikan persamaan tersebut secara simultan digunakan nilai masing-masing:

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad b_{11} = \frac{-a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$b_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad b_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Faktor pembagi tidak lain adalah determinan $|A|$ yaitu ($a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$) sehingga elemen-elemen b_{ij} dapat disederhanakan lagi menjadi:

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{|A|} \quad b_{12} = \frac{a_{12}}{|A|} \quad b_{21} = \frac{a_{21}}{|A|} \quad b_{22} = \frac{a_{11}}{|A|} \qquad 11 - 13$$

Conoh 20. Carilah invers matriks di bawah ini:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 15 & 4 \end{bmatrix}$$

Determinan $|A|$ = 10(4) – 2(15) = 10. Jadi matriks A non-singular dan mempunyai invers. Selanutnya akan dicari inversnya yaitu:

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{|A|} = \frac{4}{10} = 0{,}4 \qquad b_{21} = \frac{a_{21}}{|A|} = \frac{15}{10} = 1{,}5$$

$$b_{12} = \frac{a_{12}}{|A|} = -\frac{2}{10} = -0{,}2 \qquad b_{22} = \frac{a_{11}}{|A|} = \frac{10}{10} = 1$$

Jadi, invers matriksnya adalah: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}2 \\ -15 & 1 \end{bmatrix}$

Contoh 21. Gunakan invers matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linear simultan berikut ini.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 23 \\ 3x + 5y &= 37 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 37 \end{bmatrix}$$

a. Determinan matriks A adalah

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2(5) - 3(3) = 1$$

b. Elemen-elemen b_{ij} adalah

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{|A|} = \frac{5}{1} = 5 \qquad b_{21} = \frac{a_{21}}{|A|} = \frac{3}{1} = -3$$

$$b_{12} = \frac{a_{12}}{|A|} = -\frac{3}{1} = -3 \qquad b_{22} = \frac{a_{11}}{|A|} = \frac{2}{1} = 2$$

c. Invers matriks tersebut adalah

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

d. Jadi,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 115 - 111 \\ -69 + 74 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

11.10.2 Invers Matriks Ordo Lebih Tinggi

Mencari invers suatu matriks dapat juga dilakukan dengan melibatkan determinan dan adjointnya. Rumus untuk mendapatkan invers matriks dari adjoint dan determinannya adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj.} A \qquad 11 - 14$$

Contoh 22. Carilah invers matriks (jika ada) A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

a. Dengan menukar tempat antara elemen-elemen a_{ij} dengan kofaktornya $|C_{ij}|$ menurut hukum kofaktor, maka:

$$C = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 10 & 1 & -4 \\ -5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj.}A = C = \begin{vmatrix} 1 & 10 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

b. Determinan $|A|$ = 2(3 – 2) + 0(0 – 1) + 5(0 – 1) = -3

c. Kalikan matriks adjouint dengan I/$|A|$ = (1/-3) untuk mendapatkan invers matriks A^{-2} yaitu:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{adj}\,.A = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 1 & 10 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.333 & -3.333 & 1,667 \\ -0.333 & -0.333 & 0,667 \\ 0.333 & 1.333 & -0,667 \end{bmatrix}$$

Contoh 23. Gunakan invers matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linear simultan berikut ini:

$$\begin{matrix} 2x + y + 2x = 12 \\ 4x + 2y + 2x = 18 \\ 2x + 2y + 2x = 14 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 14 \end{bmatrix}$$

a. Dengan menukar tempat antara elemen-elemen a_{ij} dengan kofaktornya $[C_{ij}]$ menurut hukum kofaktor, maka:

$$C = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj.}A = C = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

b. Determinan $|A|$ = 2(0) – 1(8 – 4) + 2(8 – 4) = 4

c. $$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

d. Jadi, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+9-7 \\ -12+0+14 \\ 12-9+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Diperoleh x = 2 y = 2 dan x = 3

11.10.3 Invers Matriks Metode Gauss

Metode Gauss dapat juga dipakai untuk mencari balikan suatu matriks. Gandengkan matriks yang akan dicari balikannya, dengan matriks satuan di sebelah kanannya. Kemudian dilakukan operasi-operasi baris sampai matriks yang bersangkutan menjadi matriks saham. Pada kondisi ini, matriks yang ada di sebelah kanan adalah matriks balikannya (invers).

Contoh 24. Carilah invers (jika ada) matriks di bawah ini:

1. A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ Carilah invers dengan metode Gauss!
   a. Temukan matriks perbesarnnya:
   $\left[\begin{matrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right]$
   b. Kalikan baris-1 dengan 1/2
   $\left[\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0,5 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}\right]$
   c. Kurangkan 4 kali baris-1 pada baris-2
   $\left[\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0,5 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}\right]$
   d. Kalikan baris-2 dengan –1/2
   $\left[\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0,5 & 0 \\ 1 & -0,5 \end{matrix}\right]$
   e. Kurangkan 2 kali baris-2 pada baris-1
   $\left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -15 & 0 \\ 1 & -0,5 \end{matrix}\right]$
   Jadi, invers matriks A1 $\begin{bmatrix} -15 & 0 \\ 1 & -0,5 \end{bmatrix}$

2. Diketahui B = $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ carilah B dengan metode Gauss.

a. Tentukan matriks pembayarannya:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

b. Kurangkan 3 kali baris-1 pada baris-3 dan 2 kali baris ke-1 pada baris-2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -9 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

c. Kalikan baris-2 dengan -1/9

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/9 & 2/9 & -1/9 & 0 \\ 0 & -14 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

d. Kurangkan 5 kali baris-2 pada baris-1 dan tambahkan 14 kali baris-2 pada baris-3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 10/9 & -1/9 & 5/9 & 0 \\ 0 & 1 & -2/9 & 29 & -1/9 & 0 \\ 0 & 0 & -1/9 & 1/9 & -14/9 & 1 \end{array}\right]$$

e. Kalikan baris-3 dengan -9

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 10/9 & -1/9 & 5/9 & 0 \\ 0 & 1 & -2/9 & 2/9 & -1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 14 & -9 \end{array}\right]$$

f. Tambahkan 29 kali baris-3 pada baris-2 dan kurangkan 10/9 kali baris-3 pada baris-1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -15 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 14 & -9 \end{array}\right]$$

Jadi, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -15 & 10 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 14 & -9 \end{bmatrix}$

3. Tentukan invers matriks $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

a. Tentukan matriks perbesarannya:

$$C = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

b. Kurangkan 1 kali baris-1 pada baris-2 dan kurangkan 3 kali baris-1 pada baris-3

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

c. Kalikan baris-2 dengan -1/4

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}5 & 0{,}25 & -0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

d. Kurangkan 4 kali baris-2 pada baris-1 dan tambahkan 9 kali baris-2 pada baris-3.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}5 & -\ 0{,}25 & -0{,}24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3{,}5 & -0{,}75 & -2{,}25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

e. Kalikan -1 pada baris -3

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}5 & 0{,}25 & -0{,}24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3{,}5 & 0{,}75 & 2{,}25 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

f. Kurangi baris-1 dan baris-4 dengan baris-3

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -15 & -0{,}75 & -1{,}25 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}5 & 0{,}25 & -0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3{,}5 & 0{,}75 & 2{,}25 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -25 & -0{,}75 & -2{,}25 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

g. Kalikan baris-4 dengan -2/5

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -15 & -0{,}75 & -1{,}25 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}5 & 0{,}25 & -0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3{,}5 & 0{,}75 & 2{,}25 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}3 & 0{,}9 & -0{,}4 & -0{,}4 \end{array}\right]$$

h. Tentukan 3/2 kali hari-4 pada baris-1, tambahkan ½ kali baris-4 pada baris-2, kurangkan 7/2 kali baris-4 pada baris-3.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 & -0{,}6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}2 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0{,}3 & -0{,}9 & 0{,}4 & 1{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}3 & 0{,}9 & -0{,}4 & -0{,}4 \end{array}\right]$$

Jadi: $C^{i-1} = \begin{bmatrix} -0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 & -0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & -0{,}9 & 0{,}4 & 1{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}9 & -0{,}4 & -0{,}4 \end{bmatrix}$

11.11 DETERMINAN HESSIAN

Determinan Hessian [H] adalah suatu determinan matriks yang terdiri dari semua turunan parsial jenjang kedua dengan parsial langsung jenjang kedua atas diagonal utama dan parsial silang kedua di luar diagonal utama tersebut.

Seperti yang telah disinggung pada Bab X, bahwa untuk mencari nilai-nilai optimum (maksimum atau minimum) dari suatu fungsi multivariabel bebas z = f(x,y) dibutuhkan syarat yang diperlukan yaitu turunan pertama z_a dan z_y haruslah sama dengan nol.

Untuk pengujian syarat jenjang kedua diperkenalkan suatu determinan Hessian yang bentuknya sebagai berikut;

$$[H] = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yz} & z_{yy} \end{vmatrix} \qquad 11-15$$

Elemen pertama pada diagonal utama merupakan $[H_1]$ yaitu minor prinsipil pertama yang besarnya sama dengan z_{xz}. Dengan demikian,

1. Untuk $[H_1] = z_{xz} = < 0$ dan $[H_2] = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yz} & z_{yy} \end{vmatrix} = z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2 > 0$

   Hessian tersebut adalah *definit negatif*. Hessian memenuhi syarat jenjang kedua untuk suatu maksimum.
2. Untuk $[H_1] = z_{xz} = < 0$ dan $[H_2] = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yz} & z_{yy} \end{vmatrix} = z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2 > 0$

   Hessian tersebut adalah *defisit positif*. Hessian memenuhi syarat jenjang kedua untuk suatu minimum.

Contoh 25. Hitunglah z optimum ari fungsi $z = x^2 + 8x + 2xy - 4y + 2y^2$. Selidikilah apakah nilai z tersebut merupakan maksimum atau minimum.

a. Syarat jenjang pertama:

   $\delta z/\delta x = z_x = 2x + 2y + 8 = 0 \rightarrow 2x + 2y = -8$

   $\delta z/\delta y = z_y = 2x + 4y - 4 = 0 \rightarrow 2x + 4y = 4$

   Dalam bentuk matriks $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$

   Penyelesaian dengan kaidah Cramer:

   $|A| = 8 - 4 = 4 \quad |A_1| = -32 - 8 = -40 \quad |A_2| = 8 + 16 = 24$

   Diperoleh $x = |A| = \dfrac{-40}{4} = -10 \quad y = \dfrac{24}{4} = 6$

b. Pengujian syarat jenjang kedua dengan mengambil parsial-parsial jenjang kedua yang membentuk determinan Hessian:

$z_{xz} = 2 \qquad z_{xy} = z_{xy} = 2 \qquad z_{xy} = 4$

$$|H| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yz} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Dengan mengambil minor-minor prinsipilnya, $|H_1| = 2 > 0$ dan

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 3(2) = 4 > 0$$

c. Pada $[H_1] > 0$ dan $[H_2] > 0$ Hessian tersebut definit positif dan berada padad titik minimum.

Nilai optimum $z = (-10)^2 + 8(-10) + 2(-10)(6) - 4(6) + 2(6)^2 = -52$

Contoh 26. Perusahaan Kecap ABG memproduksi dua macam barang dimana fungsi pendapatan total $TR = 6q_1 + 6q_2$ dan fungsi biaya $TC = 3q_1^3 + 3q_1 + 3q_2 + q_2^2$. Maksimumkan laba bagi perusahaan tersebut dengan memakai (a) Kaidah Cramer untuk syarat jenjang pertama dan (b) Ujilah dengan determinan matriks Hessian syarat jenjang keduanya untuk meyakinkan bahwa fungsi tersebut mencpai maksimum.

a. Laba, $\pi = TR - TC = (6q_1 + 6q_2) - (3q_1^2 + 3q_1 + 2q_2 + q_2^2)$

$\pi = -3q_1^2 + 3q_1 + 4q_2 - q_2^2$

Syarat jenjang pertamanya:

$\delta\pi/\delta q_1 = \pi_1 = -6q_1 + 3 = 0 \rightarrow q_1 = 1/2$

$\delta\pi/\delta q_2 = \pi_2 = -2q_2 + 4 = 0 \rightarrow q_2 = 2$

b. Pengujian syarat jenjang kedua dengan mengambil parsial-parsial jenjang kedua yang membentuk determinan Hessian:

$\pi_{11} = -6 \qquad \pi_{12} = \pi_{21} = 0 \qquad \pi_{22} = -2$

$$|H| = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Dengan mengambil minor-minor prinsipalnya, $|H_1| = -6 < 0$ dan

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6(-2) - 0 = 12 > 0$$

c. Pada $|H_1| < 0$ dan $|H_2| > 0$ Hessian tersebut definit negatif dan mencapai maksimum pada titik kritis.

Laba maksimum $\pi = -3(1/2)^2 + 3(1/2) + 4(2) - (2)^2 = 4{,}75$.

Contoh 27. Perusahaan Sandal Jepit memproduksi dua macam barang dimana fungsi pendapatan total TR = $70q_1 + 190q_2$ dan fungsi biaya TC = $q_1^2 + 2q_1q_2 + 4q_2^2$ (dua barang tersebut berhubungan secara teknis). Maksimumkan laba dengan memakai (a). Kaidah Cramer untuk syarat jenjang pertama dan (b) Ujilah dengan determinan matriks Hessian.

a. Laba, π = TR – TC = $(70q_1 + 190q) - (q_1^2 + 2q_1q_2 + 4q_2^2)$

$$\pi = 70q_1 + 190q_2 - q_1^2 - 2q_1q_2 - 4q_2^2$$

Syarat jenjang pertamanya :

$\delta\pi/\delta q_1 = \pi_1 = 70 - 2q_1 - 2q_2 = 0 \rightarrow -2q_1 - 2q_2 = -70$

$\delta\pi/\delta q_2 = \pi_2 = 190 - 2q_1 - 8q_1 = 0 \rightarrow -2q_1 - 8q_2 = -190$

Dalam bentuk matriks $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -70 \\ -190 \end{bmatrix}$

Penyelesaian dengan kaidah Cramer:

$[A]_n$. 16 – 4 = 12 $\quad$ $[A_1]$ = 560 – 380 = 180 $\quad$ $[A_2]$ = 380 – 140 = 240

Diperoleh $q_1 = \frac{180}{12} = 15 \quad q_2 = \frac{240}{12} = 20$

b. Pengujian syarat jenjang kedua dengan mengambil parsial-parsial jenjang kedua untuk membentuk determinan Hessian:

$\pi_{11} = -2 \quad \pi_{12} = \pi_{21} = -2 \quad \pi_{22} = -8$

$|H| = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -8 \end{vmatrix}$

Dengan mengambil minor-minor prinsipilnya, $|H_1| = -2 < 0$ dan

$|H_2| = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = 2(8) - 2(2) = 12 > 0$

c. Pada $[H_1] < 0$ dan $[H_2] > 0$ Hessian tersebut definit negatif dan mencapai maksimum pada titik kritis.

Laba maksimum yang diperoleh $\pi = 70(15) + 190(20) + (15)^2 - 2(15)(20) - 4(20)^2$ = 2.425.

Contoh 28. Perusahaan monopoli memproduksi dua macam barang subsitusi dan fungsi permintaan masing-masing barang dan biaya total.

$Q_1 = 40 - 2P_1 + 2P_2 \quad Q_2 = 55 - 2P_1 + 2{,}5P_2 \quad TC = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$

Maksimum laba dengan memakai (a) Kaidah Cranner untuk syarat jenjang pertama dan (b) Ujilah dengan determinan matriks Hessian.

a. Kita ubah terlebih dulu fungsi permintaan dalam bentuk P = f(Q):

$Q_1 = 40 - 2P_1 + 2P_2 \quad \rightarrow -2P_1 + 2P_2 = Q_1 - 40$

$Q_2 = 55 - 2P_1 + 2{,}5P_2 \quad \rightarrow -2P_1 + 2{,}5P_2 = Q_2 - 55$

Dalam bentuk matriks $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 - 40 \\ Q_2 - 55 \end{bmatrix}$

Penyelesaian dengan kaidah Cramer:

$|A| \;= -2(-2{,}5) - 2(2) = 5 - 4 = 1$

$|A_1| \;= \begin{vmatrix} Q_1 - 40 & 2 \\ Q_2 - 55 & -2{,}5 \end{vmatrix} = -2{,}5Q_1 + 100 - 2Q_2 + 110$

$P_1 \;= \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{210 - 2{,}5Q_1 - 2Q_2}{1} = 210 - 2{,}5Q_1 - 2Q_2$

$|A_2| \;= \begin{vmatrix} -2 & Q_1 - 40 \\ 2 & Q_2 - 55 \end{vmatrix} = -2Q_2 + 110 - 2Q_1 + 80$

$P_2 \;= \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{-2Q_2 + 190 - 2Q_1}{1} = 190 - 2Q_2 - 2Q_1$

$\pi = TR_1 + TR_2 - TC = (210 - 2{,}5Q_1 - 2Q_2)\,Q_1 + (190 - 2Q_2 - 2Q_1)\,Q_2 - (Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2)$

$= -3{,}5Q_1^2 - 5Q_1Q_2 + 210Q_1 + 190Q_2 - 3Q_2^2$

Syarat jenjang pertamanya:

$\pi_1 = -7Q_1 - 5Q_2 + 210 = 0$

$\pi_2 = -5Q_1 - 6Q_2 + 190 = 0$

Dalam bentuk matriks $\begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -210 \\ -190 \end{bmatrix}$

Penyelesaian dengan kaidah Cramer: $|A| = 42 - 25 = 17$

$|A_1| = 1260 - 950 = 310 \qquad |A_2| = 1330 - 1050 = 280$

Diperoleh, $Q_1 = \dfrac{310}{17} = 18{,}23 \qquad Q_2 = \dfrac{280}{17} = 16{,}47$

Pada $Q_1 = 18{,}23$ dan $Q_2 = 16{,}47$ diperoleh:

$P_1 = 210 - 2{,}5(18{,}23) - 2(16{,}47) = 131{,}485$

$P_2 = 190 - 2(18{,}23) - 2(16{,}47) = 120{,}6$

b. Pengujian syarat jenjang kedua dengan mengambil parsial-parsial jenjang kedua untuk membentuk determinan Hessian:

$\pi_{11} = -7 \qquad \pi_{12} = \pi_{21} = -5 \qquad \pi_{11} = -6$

$|H| = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -5 \\ -5 & -6 \end{vmatrix}$

Dengan mengambil minor-minor prinsipilnya, $|H_1| = -7 < 0$ dan

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -7 & -5 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = 7(6) - 5(5) = 17 > 0$$

c. Pada $[H_1] < 0$ dan $[H_2] > 0$ Hessian tersebut definit negatif dan mencapai maksimum pada titik kritis.

Laba maksimum $\pi = -3{,}5(18{,}23)^2 - 5(18{,}23)(16{,}47) + 210(18{,}23)$
$+ 190(16{,}47) - 3(16{,}47)^2 = 3.479{,}3$

Contoh 29 Perusahaan monopoli memproduksi dua macam barang komplementer dan fungsi permintaan masing-masing barang dan biaya total:

$Q_1 = 180 - 12P_1 - 4P_2$ $\qquad Q_2 = 160 - 4P_1 - 8P_2$

$TC = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$

Maksimum laba dengan memakai (a) Kaidah Cramer untuk syarat jenjang pertama dan (b) Ujilah dengan determinan matriks Hessian.

a. Kita ubah terlebih dulu fungsi permintaan dalam bentuk P = f(Q):

$Q_1 = 180 - 12P_1 - 4P_2 \rightarrow -12P_1 - 4P_2 = Q_3 - 180$

$Q_2 = 160 - 4P_1 - 8P_2 \quad \rightarrow -4P_1 - 8P_2 = Q_2 - 160$

Dalam bentuk matriks $= \begin{bmatrix} -12 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 - 180 \\ Q_2 - 160 \end{bmatrix}$

Penyelesaian dengan kaidah Cramer: $|A| = 96 - 16 = 80$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} Q_1 - 180 & -4 \\ Q_2 - 160 & -8 \end{vmatrix} = -8Q_1 + 1440 + 4Q_2 - 640$$

$$P_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{800 - 8Q_1 + 4Q_2}{80} = 10 - 0{,}1Q_1 + 0{,}05Q_2$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} Q_1 - 180 & -4 \\ Q_2 - 160 & -8 \end{vmatrix} = -8Q_1 + 1440 + 4Q_2 - 640$$

b. Pengujian syarat jenjang kedua dengan mengambil parsial-parsial jenjang kedua untuk membentuk determinan Hessian:

$\pi_{11} = 7$ $\quad \pi_{12} = \pi_{21} = -5$ $\qquad \pi_{12} = -6$

$$|H| = \begin{vmatrix} \pi_1 & \pi_{12} \\ \pi_2 & \pi_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -5 \\ -5 & -6 \end{vmatrix}$$

Dengan mengambil minor-minor prinsipilnya. $|H_1| = -7 < 0$ dan

$$|H_1| = \begin{vmatrix} -7 & -5 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = 7(6) - 5(5) = 17 > 0$$

c. Pada $|H_1| < 0$ dan $|H_2| > 0$ Hessian tersebut definit negatif dan mencapai maksimum pada titik kritis.

Laba maksimum $\pi = -3{,}5\ (18{,}23)^2 - 5(18{,}23)(16{,}47) + 210(18{,}23) + 190(16{,}47)$
$- 3(16{,}47)^2 = 3.479{,}3.$

Contoh 29. Perusahaan monopoli memproduksi dua macam barang komplementer dan fungsi permintaan masing-masing barang dan biaya total:

$Q_1 = 180 - 12P_1 - 4P_2$ $\qquad$ $Q_2 = 160 - 4P_1 - 8P_2$

$TC = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$

Maksimumkan laba dengan memakai (a). Kaidah Cramer untuk syarat jenjang pertama dan (b). Ujilah dengan determinan matriks Hessian.

a. Kita ubah terlebih dahulu fungsi permintaan dalam bentuk P = f(Q):

$Q_1 = 180 - 12P_1 - 4P_2 \quad \rightarrow \quad -12P_1 - 4P_2 = Q_1 - 180$

$Q_2 = 160 - 4P_1 - 8P_2 \quad \rightarrow \quad -4P_1 - 8P_2 = Q_2 - 160$

Dalam bentuk matriks $\begin{bmatrix} -12 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 - 180 \\ Q_2 - 160 \end{bmatrix}$

Penyelesaian dengan kaidah Cramer : $|A| = 96 - 16 = 80$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} Q_1 - 180 & -4 \\ Q_2 - 160 & -8 \end{vmatrix} = -8Q_1 + 1440 + 4Q_2 - 640$$

$$P_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{800 - 8Q_1 + 4Q_2}{80} = 10 - 0{,}1Q_1 + 0{,}05Q_2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -12 & Q_1 - 180 \\ -4 & Q_2 - 160 \end{vmatrix} = -12Q_2 + 1920 + 4Q_1 - 720$$

$$P_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-12Q_2 + 200 + 4Q_2}{80} = 15 - 0{,}15Q_2 + 0{,}05Q_1$$

$\pi = TR - TC = (10 - 0{,}1Q_1 + 0{,}05Q_2)Q_1 + (15 - 0{,}15Q_2 + 0{,}05Q_1)Q_2 - (2Q_1^2 +$
$Q_1Q_2 + 2Q_2^2)$

$= -2.15Q_1^2 - 0{,}9Q_1Q_2 + 10Q_1 + 15Q_2 - 2{,}1Q_2^2$

Syarat jenjang pertamanya:

$\pi_1 = -4{,}3Q_1 - 0{,}9Q_2 + 10 = 0$

$\pi_2 = -0{,}9Q_1 - 4{,}2Q_2 + 15 = 0$

Dalam bentuk matriks = $\begin{bmatrix} -4{,}3 & -0{,}9 \\ -0{,}9 & -4{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -15 \end{bmatrix}$

Penyelesaian dengan kaidah Cramer $|A| = 18{,}06 - 0{,}81 = 17{,}25$

$|A_1| = 42 - 13{,}5 = 28{,}5$ $\quad |A_2| = 64{,}5 - 9 = 56{,}5$

Diperoleh, $Q_1 = \dfrac{28{,}5}{17{,}25} = 1{,}652 \qquad Q_2 = \dfrac{56{,}5}{17{,}25} = 3{,}78$

Pada $Q_1 = 1{,}652$ dan $Q_2 = 3{,}78$ diperoleh:

$P_1 = 10 - 0{,}1(1{,}652) + 0{,}09(3{,}78) = 14{,}516$

$P_2 = 15 - 0{,}15(3{,}78) + 0{,}05(1{,}652) = 10{,}024$

b. Pengujian syarat jenjang kedua dengan mengambil parsial-parsial jenjangkedua untuk membentuk determinan Hessian.

$\pi_{11} = -4{,}3 \qquad \pi_{12} = \pi_{22} = -0{,}9 \qquad \pi_{12} = -4{,}2$

$$|H| = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4{,}3 & -0{,}9 \\ -0{,}9 & -4{,}2 \end{vmatrix}$$

Dengan mengambil minor-minor prinsipilnya, $|H_1| = -4{,}3 < 0$ dan

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -4{,}3 & -0{,}9 \\ -0{,}9 & -4{,}2 \end{vmatrix} = 18{,}06 - 0{,}81 = 17{,}25 > 0$$

c. Pada $|H_1| < 0$ dan $|H_2| > 0$ Hessian tersebut definit negatif dan mencapai maksimum pada titik kritis.

11.12 DETERMINAN ORDO TIGA

Jika dikethaui fungsi multivariable $z = f(x_1, x_2, x_3)$, maka determinan Hessian jenjang ketiganya adalah:

$$|H| = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{vmatrix} = |H_3|$$

Syarat untuk maksimum dan minimum tergantung pada masing-masing minor principal $|H_1|, |H_2|$, dan $|H_3| = |H|$.

1. Jika $|H_1| < 0, |H_2| = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} > 0$ dan

$$|H_1| = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{vmatrix} < 0 \qquad 11\text{-}16$$

Hessian $|H|$ tersebut adalah *defisit negatif*. hessian memenuhi syarat jenjang kedua untuk suatu maksimum.

Jika minor-minor principal berubah-ubah tanda negatif dan positif maka Hessian $|H|$ tersebut definit negatif dan memenuhi syarat jenjang kedua untuk suatu maksimum.

2. Jika $|H_1| > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} > 0$ dan

$$|H_3| = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{vmatrix} < 0 \qquad 11\text{-}17$$

Hessian $|H|$ tersebut adalah *defisit positif*. Hessian memenuhi syarat jenjang kedua untuk suatu maksimum.

Jika minor-minor prinsipal semuanya positif ($|H_1|, |H_2|, |H_3| > 0$) maka Hessian $|H|$ tersebut definit positif dan memenuhi syarat jenjang kedua untuk suatu maksimum.

Contoh 30. Hitunglah nilai optimum dari fungsi p = ½ x^2 – 14x + 2xy + 2,5y^2 – 13y + yz + 32^2 – 23z + 3xz. Gunakan (a) Kaidah Cramer untuk syarat jenjang pertama dan (b) Determinan matriks Hessian untuk syarat jenjang keduanya. Selidikilah apakah nilai optimum tersebut merupakan nilai maksimum atau minimum.

Diketahui p = ½ x^2 – 14x + 2xy + 2,5y^2 – 15y + yz + 3z^2 – 23z + 3xz.

a. Syarat jenjang pertamanya:

δp/δx = 1x + 2y + 3z – 14 = 0 → 1x + 2y + 3z = 14

δp/δy = 2x + 5y + z – 15 = 0 → 2x + 5y + z = 15

δp/δz = 3x + y + 6z – 23 = 0 → 3x + y + 6z = 23

Bentuk matriknya: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \\ 23 \end{bmatrix}$

Dengan menerapkan kaidah Cramer diperoleh:

$|A|$ = 1(29) – 2(9) + 3(-13) = -28

$|A_1|$ = 4(29) – 2(55) + 3(-102) = -28

$|A_2|$ = 1(55) – 14(9) + 3(7) = -56

$|A_3|$ = 1(10/2) – 2(7) + 14(-13) = -84

x = -28/-28 = 1 y = -56/-28 = 2 dan z = -84/-28 = 3

b. Turunan parsial keduanya untuk menguji syarat jenjang dua:

p_{11} = 1 p_{12} = 2 p_{13} = 3

p_{21} = 2 p_{22} = 5 p_{23} = 1

p_{31} = 3 p_{32} = 1 p_{33} = 6

$$|H| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Dengan mengambil minor-minor prinsipilnya:

$|H_1| = 1 > 0$, $\quad |H_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1(5) - 2(2) = 1 > 0$ dan

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = |H| = 1(29) - 2(9) + 3(-13) = -28 < 0$$

c. Jadi $|H|$ definit negatif. nilai p aka mencapai maksimum related yaitu pada p = -65,5 yang melalui titik x = 1, y = 2 dan z = 2

Contoh 31. Sebuah perusahaan swasta yang bergerak pada layanan jasa faximile internasional memisahkan tiga macam permintaan untu pelayanan yaitu:

Hari Libur/ Minggu : $Q_1 = 400 – 0{,}2P_1$

Malam hari : $Q_2 = 248 – 0{,}25P_2$

Siang hari : $Q_3 = 450 – 0{,}2P_3$

Jika biaya total TC = 90 + 30Q (di mana $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$), tunjukkan bahwa sebagai monopolis yang menerapkan diskriminasi perusahaan akan memaksimumkan laba dengan menggunakan harga tertentu dalam pasar. Gunakan (a) kaidah Cramer untuk mencari tingkat output yang memaksimumkan laba (b) Hitung harga-harga yang dijual ke konsumen (c) Ujilah syarat jenjang keduanya dengan determinan matriks Hessian untuk meyakinkan bahwa fungsi tersebut mencapai maksimum.

a. Tiga macam permintaan tersebut dapat dituliskan :

$P_1 = 80 – 5Q_1$

$P_2 = 62 – 4Q_2$

$P_3 = 90 – 5Q_3$

Laba π = TR – TC = $(80 – 5Q_1)Q_1 + (62 – 4Q_2) Q_2 + (90 – 5Q_3)Q_3 – (90 + 30Q_1 + 30Q_2 + 30Q_3)$

$\pi = 50Q_1 – 5Q_1^2 + 32Q_2 – 4Q_2^2 + 60Q_3 – 5Q_3^2 – 90$

$\delta\pi/\delta Q_1 = 50 – 10Q_1 = 0 \quad \rightarrow Q_1 = 5$

$\delta\pi/\delta Q_2 = 32 – 8Q_2 = 0 \quad \rightarrow Q_2 = 4$

$\delta\pi/\delta Q_3 = 60 – 10Q_3 = 0 \quad \rightarrow Q_3 = 6$

Dengan mensubstitusikan besarnya $Q_1 = 5$, $Q_2 = 4 = Q_3 = 6$, maka laba akan mencapai maksimum pada:

$\pi \quad = 50Q_1 = 5Q_1^2 + 32Q_2 - 4Q_2^2 + 60Q_3 - 5Q_3^2 - 90$

$\quad = 50(5) - 5(5)^2 + 32(4) - 4(4)^2 + 60(6) - 5(6)^2 - 90$

$\quad = 279$

b. Harga-harga yang dijual ke konsumen:

Hari Libur/minggu : $P_1 = 80 - 5(5) = 55$

Malam Hari : $P_2 = 62 - 4(4) = 46$

Siang Hari : $P_3 = 90 - 5(6) = 60$

c. Turunan parsial keduanya untuk menguji syarat jenjang dua:

$\pi_{11} = 10 \quad \pi_{12} = 0 \quad \pi_{13} = 0$

$\pi_{21} = 0 \quad \pi_{22} = -8 \quad \pi_{23} = 0$

$\pi_{31} = 0 \quad \pi_{32} = 0 \quad \pi_{33} = -10$

Jadi: $|H| = \begin{vmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}$

Dengan mengambil minor-minor prinsipilnya:

$|H_1| = -10 < 0 \quad |H_2| = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -10(-8) - 0(0) = 80 > 0$ dan

$|H| = \begin{vmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = |H| = -10(+80) = -80 < 0$

d. Jadi, $|H|$ definisit negatif. Laba akan mencapai maksimum relatif yaitu pada π = 279.

Contoh 32. Sebuah persewaan komputer memisahkan tiga macam permintaan untuk pelayanan yaitu:

Anggota Tetap : $P_1 = 63 - 4Q_1$

Mahasiswa : $P_2 = 75 - 6Q_2$

Umum : $P_3 = 105 - 5Q_3$

Jika biaya total TC = 15Q (dimana $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$), tunjukkan bahwa sebagai monopolis yang menerapkan diskriminasi harga dan perusahaan akan memaksimumkan laba dengan mengenakan harga tertentu dalam pasar.

a. Tiga macam permintaan tersebut dapat dituliskan:

$P_1 = 63 – 4Q_1 \quad \rightarrow TR_1 = 63Q_1 – 4Q_1^2$

$P_2 = 75 – 6Q_2 \quad \rightarrow TR_2 = 75Q_2 – 6Q_2^2$

$P_3 = 105 – 5Q_1 \quad \rightarrow TR_3 = 105Q_3 – 5Q_3^2$

$TC = 15Q = 15(Q_1 + Q_2 + Q_3)$

Dengan menerapkan pendekatan MR = MC yaitu mengambil turunan pendapatan marginal dan marginal biaya, maka:

$MR_1 = MC_1 \quad \rightarrow 63 – 8Q_1 = 15 \quad \rightarrow -8Q_1 = -48$

$MR_2 = MC_2 \quad \rightarrow 75 – 12Q_2 = 15 \quad \rightarrow -12Q_2 = -60$

$MR_3 = MC_3 \quad \rightarrow 105 – 10Q_3 = 15 \quad \rightarrow -10Q_2 = -90$

Bentuk matriknya: $\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48 \\ -60 \\ -90 \end{bmatrix}$

Dengan menerapkan kaidah Cramer diperoleh:

$|A| = 8(120) = 960 \quad |A_1| = -48(120) = 5760$

$|A_2| = 8(600) = 4800 \quad |A_2| = -8(1080) = 8640$

Diperoleh, $Q_1 = \frac{5760}{960} = 6 \quad Q_2 = \frac{4800}{960} = 5 \quad Q_3 = \frac{8640}{960} = 9$

Tarif masing-masing $\quad P_1 = 63 – 4(6) = 39$

$P_2 = 75 – 6(5) = 45$

$P_3 = 105 – 5(9) = 60$

b. Pengujian syarat jenjang kedua dengan mengambil jenjang kedua untuk membentuk determinan Hessian dapat diperoleh dari hubungan MR = MC yang nilainya setara dengan parsial pertama dari fungsi laba:

$\pi_{11} = -8 \quad \pi_{12} = 0 \quad \pi_{13} = 0$

$\pi_{21} = 0 \quad \pi_{22} = -12 \quad \pi_{23} = 0$

$\pi_{31} = 0 \quad \pi_{32} = 0 \quad \pi_{13} = 10$

Jadi: $|H| = \begin{vmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}$

Dengan mengambil minor-minor prinsipilnya:

$|H_1| = -8 < 0, \quad |H_2| = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = -8(-12) - 0) = 96 > 0$ dan

$|H_3| = \begin{vmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = |H| = -8(-12)(-10) = -960 < 0$

c. Jadi, |H| definit negatif. laba akan mencapai maksimum relatif yaitu:

Laba π = $TR_1 + TR_2 + TR_3 - 15(Q_1 + Q_2 + Q_3) = 39(6) + 45(5) + 60(9) -$

$15(6 + 5 + 9)$

$= 234 + 225 + 540 - 300 = 699$

Contoh 33. Sebuah perusahaan memproduksi tiga macam barang dengan fungsi permintaan masing-masing barang dan biaya total:

$P_1 = 250 - Q_1 - Q_2 - Q_3$

$P_2 = 480 - Q_1 - Q_2$

$P_3 = 610 - Q_2 - Q_3$ dan $TC = 6Q_1^2 + 7Q_2^3 + 8Q_3^2 + Q_2Q_3 + Q_1Q_3$

a. Ketiga permintaan tersebut dapat dinyatakan dalam pendapatan.

$TR = TR_1 + TR_2 + TR_3$ dan

$TC = 6Q_1^2 + 7Q_2^2 + 8Q_3^2 + Q_2Q_3 + Q_3Q_3$, maka :

$\pi = TR - TC = (250 - Q_1 - Q_2 - Q_3)\,Q_1 + (480 - Q_1 - Q_2)Q_2 + (610 - Q_2 - Q_3)$

$Q_3 - (6Q_1^2 + 7Q_2^2 + 8Q_3^2 + Q_2Q_3 + Q_1Q_3)$

$= -7Q_1^3 - 8Q_2^3 - 9Q_3^2 - 2Q_1Q_2 - 2Q_1Q_3 + 250Q_1 + 480Q_2 + 610Q_3$

Syarat jenjang pertama:

$\pi_1 = 250 - 14Q_1 - 2Q_2 = 2Q_3 = 0$

$\pi_2 = 480 - 2Q_1 - 16Q_2 = 2Q_3 = 0$

$\pi_3 = 610 - 2Q_1 - 2Q_2 = 18Q_3 = 0$

Dalam bentuk matriks $\begin{bmatrix} -14 & -2 & -2 \\ -2 & -16 & -2 \\ -2 & -2 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -250 \\ -480 \\ -610 \end{bmatrix}$

Dengan menerapkan kaidah Cramer diperoleh:

$|A| = -14(284) + 2(32) - 2(-28) = 3.856$

$|A_1| = -250(284) + 2(7420) - 2(-8800) = -38.560$

$|A_2| = -14(7420) + 250(32) - 2(-260) = -96.400$

$|A_3| = -14(8800) + 2(260) - 250(-28) = -115.680$

Jadi, $Q_1 = \dfrac{-38.560}{-3.856} = 10$ $\quad Q_2 = \dfrac{-96.400}{-3.856} = 25$

$Q_3 = \dfrac{-115.680}{-3.856} = 30$

b. Pengujian syarat jenjang kedua dengan mengambil jenjang kedua untuk membentuk determinan Hessian.

$\pi_{11} = -14$ $\pi_{12} = -2$ $\pi_{13} = -2$

$\pi_{21} = -2$ $\pi_{22} = -16$ $\pi_{23} = -2$

$\pi_{31} = -2$ $\pi_{32} = -2$ $\pi_{33} = -18$

$$\text{Jadi: } |H| = \begin{vmatrix} -14 & -2 & -2 \\ -2 & -16 & -2 \\ -2 & -2 & -18 \end{vmatrix}$$

Dengan mengambil minor-minor prinsipilnya:

$$|H_1| = -14 < 0,$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -14 & -2 \\ -2 & -16 \end{vmatrix} = -14(-16) - (-2)(-2) = 220 > 0$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} -14 & -2 & -2 \\ -2 & -16 & -2 \\ -2 & -2 & -18 \end{vmatrix} = |H| = 14(284) + 2(32) - 2(28)$$

c. Jadi $|H|$ definit negatif dan laba akan mencapai maksimum.

11.13 HESSIAN: OPTIMASI BERKENDALA

Penghitungan optimasi sebuah fungsi yang menghadapi kendala dapat juga diselesaikan dengan determinan Hessian yaitu dengan membentuk fungsi baru (fungsi Lagrange) yang merupakan penjumlahan dari fungsi yang hendak dioptimasikan ditambah dengan hasilkali pengganda Lagrange dengan fungsi kendalanya.

Suatu fungsi f(x,y) yang hendak dioptimasikan di bawah suatu fungsi kendala g(x,y), maka fungsi bentukan yang baru $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ dapat dibentuk dimana syarat jenjang pertamanya adalah $L_x = L_\lambda = 0$. Dengan demikian syarat jenjangkeduanya dapat dinyatakan sebagai *Hessian* yang dibatasi $|H_\lambda|$ yaitu:

$$|H_\lambda| = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix} \text{ atau } \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_x & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix}$$

Terlihat bahwa Hessian tersebut merupakan Hessian ordo-2 yang dibatasi turunan pertama kendala dengan nol pada diagonal utamanya.

Hessian yang lebih tinggi ordo (nxn) yang dibatasi yang merupakan fungsi multivariable $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dengan kendala $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ disusun menjadi:

$$|H_2| = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} & g_1 \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} & g_2 \\ L_{31} & L_{32} & \cdots & L_{3n} & g_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} & g_n \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n & 0 \end{vmatrix} \text{ atau } \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ g_3 & L_{31} & L_{32} & \cdots & L_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n & L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{vmatrix} \qquad 12-21$$

1. Jika $|H_2| > 0, |H_3| > 0, |H_4| > 0$. Hessian yang dibatasi tersebut adalah *definit negatif* yang merupakan syarat untuk suatu maksimum.
2. Jika $|H_2|$, $|H_3|$, …., $|H_n| < 0$. Hessian yang dibatasi tersebut adalah *definit positif* yang merupakan syarat suatu minimum.

Contoh 34. Seorang mengkonsumsi dua jenis minuman X dan Y yang dicerminkan oleh kepuasan U = 8 XY. Tentukan pola konsumen minimum tersebut agar memuaskan konsumen walaupun dibatasi kendala anggaran 2x + 4y = 12 dengan (a). Mencari titik-titik kritisnya dan (b). Menggunakan determinan matriks Hessian yang dibatasi $|H_\lambda|$ untuk menguji syarat jenjang keduanya.

Fungsi obyektif U = 8XY dan fungsi kendala 2x + 4y = 12

Fungsi Lagrange U = 8XY + λ(2x + 4y – 12)

a. Syarat jenjang pertama :

   $U_x = 8y + 2\lambda = 0 \qquad \rightarrow 8y + 2\lambda = 0$

   $U_y = 8y + 4\lambda = 0 \qquad \rightarrow 8x + 4\lambda = 0$

   $U_\lambda = 2y + 4y = 0 \qquad \rightarrow 2x + 4y = 12$

   Dalam bentuk matriks $\begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 8 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

   Dengan menerapkan kaidah Cramer diperoleh:

   $|A| = -8(-8) + 2(32) = 128 \qquad |A_1| = -8(-48) = 384$

   $|A_2| = 2(96) = 192 \qquad |A_3| = -8(96)$

   Jadi, $\quad x = \dfrac{384}{128} = 3 \quad y = \dfrac{192}{128} = 1{,}5 \quad \lambda = \dfrac{-768}{128} = -6$

b. Pengujia syarat jenjang kedua dengan mengambil jenjang kedua untuk membentuk determinan Hessian yang dibatasi:

   $U_{xx} = 0 \qquad U_{33} = 0 \qquad U_{xy} = 8 \qquad g_x = 2 \qquad g_x = 4$

Jadi $|H_\lambda| = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 8 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow |H_\lambda| = |H_2| = 128 > 0$

c. Karena $|H_2| > 0$, maka $|H_\lambda|$ adalah definit negatif data U maksimum pada nilai U = 8(3)(1,5) = 36

Contoh 35. Fungsi produksi dicerminkan dengan persamaan Q = 12KL (di mana K dan L adalah input produksi). jika seorang produsen mencadangkan anggaran 96 rupiah untuk membeli input produksi K dan input L dengan masing-masing harga per unit 4 rupiah dan 3 rupiah, hitunglah berapa unit masing-masing input yang harus digunakan agar produksinya optimum.

Fungsi obyektif Q = 12KL dan fungsi kendala 4K + 3L = 96

Fungsi Lagrange Q = 12KL + λ(4K + 3L – 96)

a. Syarat jenjang pertama:

$Q_X = 12L + 4\lambda = 0 \quad \rightarrow 12L + 4\lambda = 0$

$Q_L = 12K + 3\lambda = 0 \quad \rightarrow 12K + 3\lambda = 0$

$Q_\lambda = 4K + 3L - 96 = 0 \rightarrow 4K + 3L = 0$

Dalam bentuk matriks $\begin{bmatrix} 0 & 12 & 4 \\ 12 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ L \\ \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 96 \end{bmatrix}$

Dengan menerapkan kaidah Cramer diperoleh:

$|A|$ = – 12(-12) + 4(36) = 288 $\quad |A_1|$ = –12(-288) = 3.456

$|A_2|$ = 4(1152) = 4.608 $\quad |A_2|$ = –12(1152) = 13.824

$$\text{Jadi}, K = \frac{3.456}{288} = 12 \quad L = \frac{4.608}{288} = 16 \quad \lambda = \frac{13.824}{288} = -48$$

b. Pengujian syarat jenjang kedua dengan mengambil jenjang kedua untuk membentuk determinan Hessian yang dibatasi:

$Q_{XX} = 0 \quad Q_{11} = 0 \quad Q_{XI} = 12 \quad g_X = 4 \quad g_L = 3$

Jadi : $|H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 12 & 4 \\ 12 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} |H_3| = |H_2| = 288 > 0$

c. Karena $|H_2| > 0$, maka $|H_\lambda|$ adalah definit negatif dan Q maksimum pada nilai-nilai kritik. Jadi, agar produksinya optimum maka harus digunakan kombinasi K = 12 unit dan L = 16 unit, dengan hasil produksi maksimum Q = 12(12)(16) = 2304.

Contoh 36. Minimumkan fungsi biaya total C = 2x + 4Y dengan kendala 8xy = 36. Tentukan biayaminimum dan ujilah dengan determinan matriks Hessian $|H_\lambda|$ untuk menguji syarat jenjang keduanya.

Fungsi obyektif C = 2x + 4y dan fungsi kendala 8xy = 36

Fungsi Lagrange C = 2x + 4y + λ(8xy – 36)

a. Syarat jenjang pertama

$C_x = 8\lambda y + 2 = 0 \rightarrow 4\lambda y = -1$

$C_y = 8\lambda x + 4 = 0 \rightarrow 4\lambda x = -2$

$C_\lambda = 8\lambda y - 36 = 0 \rightarrow xy - 4{,}5 = 0$

Penyelesaian secara simultan diperoleh x = 3, y = 1,5 dan λ = – 1/6

b. Turunan parsial kedua C untuk menguji syarat jenjang kedua Hessian yang dibatasi adalah:

$C_{xx} = 0$ $C_{11} = 0$ $C_{xy} = 8\lambda$ $g_x = 8y$ $g_y = 8x$

$$|H_\tau| = \begin{vmatrix} 0 & 8\lambda & 8y \\ 8\lambda & 0 & 8x \\ 8y & 8x & 0 \end{vmatrix} = 0(-64x^2) - 8\lambda(-64xy) + 8y(64x\lambda)$$

$= 1.024\lambda < 0$ (λ negatif)

c. Karena $|H_\lambda| = |H_2| = 1024\lambda < 0$, maka $|H_\lambda|$ adalah definit positif dan C minimum pada nilai C = 2(3) + 4(1,5) = 12.

Contoh 37. Fungsi utility dicerminkan persamaan, U = xy + 2x. Tentukan kombinasi x dan y agar memuaskan walaupun dibatasi kendala anggaran 4x + 2y = 60 dengan (a). Mencari titik-titik kritisnya dan (b) Menggunakan determinan matriks Hessian yang dibatasi untuk menguji syarat jenjang keduanya.

Fungsi oyektif U = xy + 2x dan fungsi kendala 4x + 2y = 60

Fungsi lagrange U = xy + 2x + λ(4x + 2y - 60)

a. Syarat jenjang pertama:

$U_x = y + 2 + 4\lambda = 0 \rightarrow y + 4\lambda = -2$

$U_y = x + 2\lambda = 0 \rightarrow x + 2\lambda = 0$

$U_\lambda = 4x + 2y - 60 = 0 \rightarrow 4x + 2y = 60$

Dalam bentuk matriks $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix}$

Dengan mnerapkan kaidah Cramer diperoleh:

$|A| = -1(-8) + 4(2) = 16$ $\quad |A_1| = -2(-4) - 1(-120) = 128$

$|A_2| = 2(-8) + 4(60) = 224$ $\quad |A_3| = -1(60) - 2(2) = -64$

Jadi, $x = \dfrac{128}{16} = 8 \quad y = \dfrac{224}{16} = 14 \quad \lambda = -\dfrac{64}{16} = -4$

b. Pengujian syarat yang kedua dengan mengambil jenjang kedua untuk membentuk determinan Hessian yang dibatasi.

$U_{xx} = 0$ $\quad U_{yy} = 0$ $\quad U_{xy} = 1$ $\quad g_1 = 4$ $\quad g_y = 2$

Jadi, $|H_\lambda| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} |H_2| = |H_2| = 16 > 0$

c. Karena $|H_2| > 0$, maka $|H_\lambda|$ adalah definit negatif dan U maksimum pada nilai-nilaikritis. Jadi, agar utility mencapai optimum maa harus digunakan kombinasi x = 8 dan y = 14, dengan U = (8)(14) + 2(8) = 128.

Contoh 38. Minimumkan biaya total perusahaan $C = 4Q_1 + 3Q_2$ di bawah kendala anggaran $24Q_1Q_2 = 4608$.

Fungsi obyektif $C = 4Q_1 + 3Q_2$ dan kendala $24Q_1Q_2 = 4608$

Fungsi Lagrange $C = 4Q_1 + 3Q_2 + \lambda(24Q_1Q_2 - 4608)$

a. Syarat jenjang pertama:

$\left.\begin{array}{l} C_1 = 4 + 24\lambda Q_2 = 0 \\ C_2 = 3 + 24\lambda Q_1 = 0 \end{array}\right] \lambda = \dfrac{-1}{6Q_2} = \dfrac{-1}{8Q_1} \rightarrow Q_1 = (6Q_2)/8$

$C_\lambda = 24Q_1Q_2 = 4608 = 0$

Dengan mensubtitusikan $Q_1 = (6Q_1)/8$, maka:

$24(6Q_2/8)Q_2 - 4608 = 0 \quad \rightarrow \quad 18Q_2^2 - 4608 = 0$

$Q_2^2 = 256 \rightarrow Q_2 = 16$

Pada $Q_2 = 16$ unit, diperoleh $Q_1 = (6\text{-}16)/8 = 12$ unit dan $\lambda = -0{,}0104$

b. Pengujian syarat jenjang kedua dengan mengambil jenjang kedua untuk membentuk determinan Hessian yang dibatasi:

$C_{11} = 0$ $\quad C_{12} = 0$ $\quad Q_{12} = 24\lambda$ $\quad g_1 = 24Q_2$ $\quad g_\lambda = 24Q_1$

$$|H_\lambda| = \begin{vmatrix} 0 & 24\lambda & 24Q_2 \\ 24\lambda & 0 & 24Q_1 \\ 24Q_2 & 24Q_1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow |H_1| = |H_2|$$

$= 27648\lambda < 0$ (λ negatif)

c. Karena $|H_2| < 0$, maka $|H_\lambda|$ adalah definit positif dan C minimum pada nilai-nilai kritis. Jadi, agar biaya minimum maka harus digunakan kombinasi $Q_1 = 12$ unit dan $Q_2 = 16$ unit, dengan biaya total minimum adalah C = 4(12) + 3(16) = 96.

Contoh 39. Minimumkan biaya total perusahaan $C = 4Q_1 + 2Q_2$ di bawah kendala anggaran $Q_1Q_2 + 2Q_1 = 128$.

Fungsi obyektif $C = 4Q_1 + 2Q_2$ dan kendala $Q_3Q_2 + 2Q_3 = 128$

Fungsi Lagrange $C = 4Q_2 + 2Q_2 + \lambda(Q_1Q_2 + 2Q_1 - 128)$

a. Syarat jenjang pertama:

$$\left.\begin{matrix} C_1 = 4 + \lambda(Q_2 + 2) = 0 \\ C_2 = 2 + \lambda Q_1 = 0 \end{matrix}\right] \lambda = \frac{-2}{Q_1} = \frac{-4}{(Q_2 + 2)} \rightarrow Q_1 = 0{,}5(Q_2 + 2)$$

$C_\lambda = Q_1Q_2 - 2Q_1 = 128 = 0$

Dengan mensubtitusikan $Q_1 = (6Q_1)/8$, maka:

$24(6Q_2/8)Q_2 - 4608 = 0 \quad \rightarrow \quad 18Q_2^2 - 4608 = 0$

$Q_2^2 = 256 \rightarrow Q_2 = 16$

Pada $Q_2 = 16$ unit, diperoleh $Q_1 = (6\text{-}16)/8 = 12$ unit dan $\lambda = -0{,}0104$

b. Pengujian syarat jenjang kedua dengan mengambil jenjang kedua untuk membentuk Hessian yang dibatasi.

$C_{11} = 0 \qquad C_{22} = 0 \qquad Q_{12} = 24\lambda \qquad g_1 = 24Q_2 \qquad g_2 = 24Q_1$

$$\text{Jadi, } |H_1| = \begin{vmatrix} 0 & 24\lambda & 24Q_2 \\ 24\lambda & 0 & 24Q_1 \\ 24Q_2 & 24Q_2 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow |H_\lambda| = |H_2|$$

$= 27648\lambda < 0$ (λ negatif)

c. Karena $|H_2| < 0$, maka $|H_\lambda|$ adalah definit positif dan C minimum pada nilai-nilai kritis. Jadi, agar biaya minimum maka harus digunakan kombinasi $Q_1 = 12$ unit agar $Q_2 = 16$ unit, dengan biaya total minimum adalah C = 4(12) = 3(16) = 96.

Contoh 39. Minimumkan biaya total perusahaan $C = 4Q_1 + 2Q_2$ di bawah kendala anggaran $Q_1Q_2 + 2Q_1 = 128$.

Fungsi obyektif C = $4Q_1 + 2Q_2$ dan kendala $Q_1Q_2 + 2Q_1 = 4608$

Fungsi Lagrange C = $4Q_1 + 2Q_2 + \lambda(Q_1Q_2 + 2Q_1 - 128)$

a. Syarat jenjang pertama:

$$\begin{matrix} C_1 = 4 + \lambda(Q_2 + 2) = 0 \\ C_2 = 2 + \lambda Q_1 = 0 \end{matrix} \Big] \ \lambda = \frac{-2}{Q_1} = \frac{-4}{(Q_2 + 2)} \rightarrow Q_1 = 0{,}5(Q_2 + 2)$$

$C_\lambda = Q_1Q_2 - 2Q_1 = 128 = 0$

Dengan mensubtitusikan $Q_1 = 0{,}5\ (Q_2 + 2)$, maka:

$0{,}5(Q_1 + 2)Q_2 + (Q_2 + 2) = 128 \ \rightarrow (Q_2 + 2)Q_2 + 2(Q_2 + 2) = 256$

Disederhanakan menjadi:

$Q_2^2 + 4Q_2 - 254 = 0$

$(Q_2 - 14)(Q_2 + 18) = 254$

$Q_2 = 14$ dan $Q_2 = -18$ (tidak karena alasan ekonomis)

Pada $Q_2 = 14$ unit, diperoleh $Q_1 = 0{,}5(14+2) = 8$ unit dan $\lambda = -0{,}25$

b. Pengujian syarat jenjang kedua dengan mengambil jenjang kedua untuk membentuk determinan Hessian yang dibatasi:

$C_{11} = 0$ $\quad$ $C_{22} = 0$ $\quad$ $C_{12} = \lambda$ $\quad$ $g_1 = Q_1+2$ $\quad$ $E_2 = Q_1$

$$\text{Jadi, } |H_1| = \begin{vmatrix} 0 & \lambda & Q_2 + 2 \\ \lambda & 0 & Q_1 \\ Q_2 + 2 & Q_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$|H_1| = |H_2| = 432\lambda < 0 (\lambda \text{ negatif})$

c. Karena $|H_2| < 0$, maka $|H_\lambda|$ adalah definit positif dan C minimum pada nilai-nilai kritis. Jadi agar biaya minimum maka harus digunakan kombinasi $Q_1 = 8$ unit dan $Q_2 = 14$, dengan bunga total minimum adalah C = 4(8) + 2(14) = 60

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Hitunglah operasi aljabar matriks jika diberikan:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -3 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

a. D = A + B + C $\qquad$ b. D = 2(A – B) + C

c. D = A – B – C $\qquad$ d. D = (A – B) + (A – C)

e. D = (A – B) + 3C $\qquad$ f. D = (A + B) – (A + C)

2. Jika A dan B serta C masing-masing matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Hitunglah operasi-operasi berikut:

a. 2A + 2B　　　　b. 2(A – B) + C

c. 2A –2 B + 2C　　　　d. 3(A – B) + (A – C)

e. (A – B) + 3C　　　　f. 2(A + B) – (A + C)

3. Diberikan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Carilah:　a. AB　　b. AC　　c. ABC

　　d. AC – 3B　　e. B – AC　　f. AB + BC

4. Selesaikan persamaan linear di bawah ini dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

a. $4x_1 + 8x_2 = 24$
   $5x_1 + 5x_2 = 20$

b. $-4x_1 + 5x_2 = 60$
   $5x_1 + 2x_2 = 90$

c. $4x_1 + 8x_2 = 0$
   $5x_1 - 5x_2 = 20$

d. $4x_1 + 5x_2 = -50$
   $5x_1 - 2x_2 = -20$

5. Selesaikan persamaan linear di bawah ini dengan menginginkan metode elimiasi Gauss.

a. $4x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 16$
   $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$
   $3x_1 + 3x_2 + 9x_1 = 15$

b. $8x_1 + 9x_2 - 5x_3 = 12$
   $2x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 12$
   $2x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 3$

6. Hitunglah determinan matriks-matriks ordo-2 di bawah ini:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

7. Hitunglah-determinan matriks-matriks di bawah ini:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 5 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Tentukan matriks kofaktor C dan matriks adjoint A serta determinan dan matriks di bawah ini:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 2 \\ 8 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

9. Hitunglah nilai variabel keputusan dari persamaan-persamaan linear simultan kaidah Cramer.

a. $4x_1 + 4x_2 = 16$ b. $4x_1 + 9x_2 = 5$ c. $8x_1 – 4x_2 = 40$

$9x_1 – 2x_2 = 14$ $-8x_1 + 2x_2 = -6$ $9x_1 + 2x_2 = -20$

d. $4x + 2y – 4z = 20$ c. $7x + 6y + 4z = 170$ e. $8x + 6y – 2z = 60$

$2x – 6y + 6z = 10$ $9x + 9y – 6z = 120$ $3x + 4y – 5z = 12$

$-3x + 3y + 5z = 50$ $5x – 6y + 5z = -60$ $5x – 5y + 6z = 36$

10. Carilah invers matriks di bawah ini:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -8 \\ 8 & 9 & 9 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 7 & 0 & 5 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

11. Gunakan invers matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linear simultan berikut ini:

a. $2x + 3y – 2z = 30$ b. $8x + 2y – 3z = 70$ c. $2x + 6y – 2z = 30$

$5x + 2y – 4z = 20$ $5x + 3y – 3z = 50$ $3x + 6y = 45$

$6x – 2y + 2x = 30$ $3x – 4y + 6z = 50$ $3x – 6y + 8z = 55$

12. Sebuah fungsi $u(x,y) = 5x^2 – 7x + 2xy – 4y + 5y^2$. Selidikilah apakah nilai u tersebut merupakan maksimum atau minimum.

13. Sebuah fungsi $u(x,y) = -x^2 + 3x + 9xy + 2y – 3y^2$. Selidikilah apakah nilai u tersebut merupakan maksimum atau minimum.

14. Perusahaan memproduksi dua macam barang dengan pendapatn $TR = 10Q_1 + 10Q_2$ dan biaya total $TC = Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + Q_2^2$. Maksimumkan laba dengan memakai: (a). Kaidah Cramer untuk syarat jenjang pertama dan (b) Ujilah dengan determinan matriks Hessian syarat jenjang keduanya.

15. Perusahaan monopoli memproduksi dua macam barang substansi dan fungsi permintaan masing-masing barang $Q_1 = 20 – 2P_1 + 2P_2$ $Q_2 = 60 + P_1 – 3P_2$ dan biaya total $TC = Q_1^2 = Q_1^2 – Q_1Q_2 + Q_3^2$. Maksimumkan laba dengan memakai (a) Kaidah Cramer untuk syarat jenjang pertama dan (b) Ujilah dengan determinan matriks Hessian.

16. Sebuah perusahaan swasta yang bergerak pada layanan jasa internet memisahkan tiga macam permintaan untuk pelayanannya yaitu:

Hari libur : $P_1 = 75 – 6Q_1$

Malam hari : $P_2 = 105 – 5Q_2$

Siang hari : $P_3 = 63 – 4Q_1$

Jika biaya total TC = 20 + 15Q (di mana $Q = Q_1 + Q_2 + Q_2$). Gunakan kaidah Cramer untuk mencari tingkat output yang memaksimumkan laba dan hitung harga-harga yang dijual ke konsumen. Ujilah syarat jenjang keduanya dengan determinan matriks. Hessian untuk meyakinkan bahwa fungsi tersebut mencapai maksimum.

17. Seorang mengkonsumsi dua jenis makanan x dan y yang dicerminkan oleh tingkat kepuasan $U = dx^{23}.\ y^{1/3}$. Tentukan pola konsumsi minimum tersebut agat memuaskan konsumen walaupun dibatasi kendala anggaran 4x + 3y = 144 dengan (a) Mencari titik-titik kritisnya dan (b) Menggunakan determinan matriks Hessian yang dibatasi untuk menguji syarat jejang keduanya.
18. Fungsi produksi dicerminkan oleh persamaan $Q = K^3L^2$ (di mana K dan L input-input produksi). jika produsen mencadangkan anggaran 4.000 untuk membeli input yaitu $P_K = 150$ dan $P_L = 250$, hitunglah berapa untuk masing-masing input yang digunakan agar produksinya optimum.
19. Sebuah perusahaan monopolistik memproduksi 2 macam barang x dan y menghadapi fungsi-fungsi permintaan masing-masing yaitu: $x = -P_1 + 2P_y + 80$ dan $y = 2P_x – 6P_y + 110$. Jika fungsi biaya totalnya adalah $TC = 0{,}5x^2 + xy + y^2$.
    a. Berapakah tingkat output yang memaksimumkan lab ajika kuota produksi mengharuskan 3x + 4y = 350.
    b. Apakah pada penemuan kuota tersebut perusahaan masih mengalami keuntungan? Jika tidak, berapa besar kerugian yang paling minimum yang ditanggung yang perusahaan tersebut.
20. Minimumkan biaya produksi untuk 434 unit jika fungsi produksi perusahaan dicerminkan persamaan $Q = 10K^{0,1}\ L^{0,7}$ dan input masing-masing adalah $P_K = 10$, $P_L = 28$ dengan: (a) Mencari nilai-nilai kritis dan (b) Pengujian kasus tersebut dengan memakai determinan matriks Hessian untuk meyakinkan bahwa fungsi tersebut akan mencapai minimum.
21. Kerjakan kembali seperti soal-20. Diketahui fungsi biaya total perusahaan dinyatakan dalam persamaan TC = 4x + 3y di bawah kendala 675 = 4xy

22. Fungsi produksi dicerminkan oleh persamaan Q = K + KL. Jika produsen mencerminkan anggaran 110 untuk membeli input $P_K = 6$ $P_L = 2$, hitunglah berapa unit masing-masing input yang digunakan agar produksinya optimum.
23. Suatu fungsi permintaan Marshall dinyatakan dalam persamaan yaitu, Q = 3K + KL + 2L. Carilah input K dan L jika diketahui benar kendala anggaran dinyatakan sebagai fungsi $2{,}4P_K + 4P_L = 60$.
24. Kerjakan kembali soal-23. Jika diketahui besarnya kendala anggaran dinyatakan sebagai fungsi $4P_K + 24P_L = 60$.

BAB XII
INPUT-OUTPUT

12.1 MODEL INPUT OUTPUT

Konsep dasar Model Input Output (1-0) ini pertama kali diperkenalkan oleh seorang ahli ekonomi tokoh kaum Physiokrat berkebangsaan Perancis yaitu Francois Quesnay pada tahun 1758. Quesnay memperkenalkan *Tableau Economique* yang menggambarkan pendekatan pengeluaran dalam suatu perekonomian dengan cara sistematik. Seabad kemudian seorang ekonom Perancis lainnya yang bernama Leon Walras mengemukakan teori keseimbangan umum. Pemikiran Walras ini kemudian dikembangkan oleh Wassily W. Leontief pada tahun 1936 menjadi suatu tabel transaksi yang merupakan dasar dari analisis I-O dan akhirnya berkembang dalam bentuk tabel I-O seperti yang kita kenal sekarang ini. Atas sumbangan yang sangat berharga itu, akhirnya Leontief memperoleh hadiah Nobel dalam bidang ekonomi pada tahun 1973.

Model 1-O yang dikembangkan oleh Leontief ini diberangkatkan dari *production function* (fungsi produksi Leontief). Asumsi dasar dari fungsi produksi Leontief ini adalah fixed-proportions, artinya hanya ada satu kombinasi input untuk memproduksi tingkat output tertentu.

Model I-O pada dasarnya menggambarkan suatu keseimbangan umum secara empiris pada sisi produksi. Penekanan pada sisi produksi ini sangat penting karena Model I-O menggambarkan permintaan akhir barang dan jasa (konsumsi swasta, investasi, sektor pemerintah, ekspor dan impor) sebagai variabel eksogen.

Analisis dalam buku ini terbatas pada model I-O statis secara teoritis dan penerapannya dalam kebijaksanaan sektoral. Kenyataannya, penerapan model I-O tidak hanya terbatas untuk perencanaan sektoral saja, namun juga dapat digunakan untuk keperluan perencanaan regional yaitu yang dikenal dengan model IRIO (*Inter Regional Input Output*) dan MRIO (*Multi Regional Input Output*). Sebagai suatu metode kuantitatif yang menelaah proses kegiatan ekonomi, model I-O menghadapi persoalan pokok, yaitu bagaimana mengidentifikasi kegiatan-kegiatan ekonomi yang banyak ragam dan sifatnya secara kuantitatif. Untuk itu suatu perekonomian dengan model analisis ekonomi input output yang berwatak terbuka dan statis, harus memenuhi asumsi dasar yang melandasi penyusunannya. berikut:

Ada 3 asumsi pokok yang mendasari model I-O yaitu sebagai berikut:

1. Asumsi Keseragaman (*homogenity assumption*), yang mensyaratkan tiap sektor memproduksi suatu output tunggal dengan struktur input tunggal dan tidak ada substitusi otomatis terhadap input dari sektor yang berbeda-beda.
2. Asumsi Kesebandingan (*proportionality assumption*), yang menyatakan hubungan antara input dan output di dalam tiap sektor merupakan fungsi linear yaitu jumlah tiap jenis input yang diserap oleh sektor tertentu naik atau turun sebanding dengan kenaikan atau penurunan output sektor tersebut. Dengan kalimat lain, perubahan suatu tingkat output selalu didahului oleh perubahan pemakaian input yang sebanding.
3. Asumsi Penjumlahan (*addivity assumption*), yaitu prinsip dimana tan efek total dari pelaksanaan produksi di berbagai sektor dihasilkan oleh masing-masing sektor secara terpisah. Ini berarti bahwa semua pengaruh di luar sistem input output akan diabaikan.

Tabel I-O yang umum dibagi 3 submatriks yang selanjutnya disebut sebagai kuadran I, II dan III. Kuadran I terdiri dari angka- angka transaksi antara yaitu barang dan jasa yang digunakan dalam proses produksi. Isian di sepanjang baris pada kuadran I ini memperlihatkan alokasi output suatu sektor yang digunakan sebagai input oleh sektor-sektor lain dan disebut Permintaan Antara. Isian menurut kolom menunjukkan pemakaian barang dan jasa oleh suatu sektor yang berasal dari sektor-sektor lain dan disebut Input Antara.

Tabel 12.1 Contoh Kerangka Dasar Tabel Input Output.

Sektor	Permintaan Antara					Permintaan Akhir	Jumlah Output
	1	2	3		0	C + I + G + E – M	
1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	…..	X_{1n}	F_1	X_1
2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	…..	X_{2n}	F_2	X_2
3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	…..	X_{3n}	F_3	X_3
				…..			
				…..			
				…..			
	X_{n1}	X_{n2}	X_{n3}	…..	X_{nn}	F_n	X_n
Nilai Tambah	V_1	V_2	V_3		V_n		
Jumlah input	X_1	X_2	X_3	…..	X_n		

Dengan: Xij = Sejumlah output sektor ke-i yang digunakan sebagai input sektor j untuk menghasilkan output sebesar Xj

Fi = Permintaan akhir sektor ke-i

Vj = Input primer sektor ke-j

C = Konsumsi swasta

I = Investasi

G = Konsumsi pemerintah

E,M = Ekspor dan Impor.

Kuadran II berisi transaksi untuk Permintaan Akhir yang berasal baik dari output berbagai sektor produksi maupun impor. Sedangkan kuadran III terdiri dari sel-sel yang berisi Input Primer atau Nilai Tambah (*value added*). Nilai Tambah seluruh sektor ditambah pajak penjualan impor dan bea masuk akan menghasilkan Produk Domestik Bruto (PDB). Selanjutnya PDB akan sama dengan seluruh Permintaan Akhir dikurangi impor dan jasa.

Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa sejumlah output X_1 dialokasikan berturut-turut pada sektor produksi 1, 2, 3,..... n sebesar X_{11} X_{12}, X_{13}, X_{1n} sebagai permintaan antara dan sejumlah F, sebagai permintaan akhir. Sedangkan secara vertikal, sejumlah input sebagai produksi 1 berasal dari sejumlah input antara, masing-masing X_{11}, X_{21}, X_{31}, , X_{n1} dan input primer sebesar V_1. Secara matematis dituliskan.

- Menurut Baris:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + \ldots\ldots + X_{1n} + F_1 = X_1$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + \ldots\ldots + X_{2n} + F_2 = X_2$

$X_{21} + X_{32} + X_{33} + \ldots\ldots + X_{3n} + F_3 = X_3$

- - - ….. - - -

- - - ….. - - -

$X_{n1} + X_{n2} + X_{n3} + \ldots. + X_{nn} + F_n = X_n$

- Menurut Kolom:

$X_{11} + X_{21} + X_{31} + \ldots\ldots + X_{n1} + F_1 = X_1$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} + \ldots\ldots + X_{n2} + F_2 = X_2$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} + \ldots\ldots + X_{n3} + F_3 = X_3$

- - - ….. - - -

- - - ….. - - -

$$X_{1n} + X_{2n} + X_{3n} + \ldots. + X_{nn} + F_n = X_n \qquad 12\text{-}1$$

Ada dua macam model input output Leontief yaitu Model Leontief Tertutup dan Model Leontief Terbuka. Pada model Leontief tertutup permintaan akhir diperlakukan seperti sektor produksi lainnya. Dengan kata lain, kolom permintaan akhir diperlakukan sama dengan baris-baris yang menunjukkan jumlah output yang dialokasikan kepada pelbagai sektor produksi. Dalam model Leontief terbuka kolom permintaan akhir menunjukkan koefisien konsumsi sedangkan kolom permintaan antara menunjukkan koefisien teknologi.

12.2 PERLAKUAN IMPOR SECARA KOMPETITIEF

Dalam Tabel I-O dengan perlakuan impor secara kompetitif, transaksi untuk input antara dan permintaan akhir mencakup juga barang dan jasa impor. Jumlah impor menurut sektor terlihat dengan jelas hanya di vektor kolom impor dalam kuadran II. Ini ditentukan karena alasan sistem pengumpulan data impor. Pencatatan dan pengumpulan data impor menurut jenis barang seperti penggolongan dengan sistem BTN (*Brussel Tariff Nomenclature*), CCCN (*Customs Cooperation Commodity Nomenclature*) dan HS (*Harmonize System*) lebih cocok untuk peletakan impor di kuadran II, sehingga keadaan keseimbangannya adalah:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + \qquad + X_{1n} + F_1 - M_1 = X_1$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + \ldots\ldots. + X_{2n} + F_2 - M_2 = X_2$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + \ldots\ldots. + X_{3n} + F_3 - M_3 = X_3$$
$$- \quad - \quad - \quad \ldots.. \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$- \quad - \quad - \quad \ldots.. \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$X_{n1} + X_{n2} + X_{n3} + \ldots\ldots + X_{1n} + F_n - M_2 = X_n \qquad 12\text{-}2$$

Oleh karena $X_{ij} = a_{ij} X_j$, maka keadaan keseimbangannya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + \ldots\ldots + a_{1n} X_n + F_1 = X_1 + M_1$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + \ldots. + a_{2n} X_n + F_2 = X_2 + M_2$$
$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 + \ldots\ldots + a_{3n} X_n + F_3 = X_3 + M_3$$
$$- \quad - \quad - \quad \ldots. \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$- \quad - \quad - \quad \ldots. \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$a_{ni} X_1 + a_{n2} X_2 + a_{n3} X_3 + \ldots\ldots + a_{nn} X_n + F_n = X_n + M_n$$

Dinyatakan dalam bentuk matriks:

$$AX + F = X + M$$

$$[I – A].X = F – M$$

$$X = [I – A]^{-1} (F-M) \qquad 12\text{-}3$$

Dengan $[I – A]^{-1}$ adalah koefisien matriks kebalikan Leontief.

12.3 PERLAKUAN IMPOR SECARA NON-KOMPETITIF

Perlakukan impor secara non-kompetitief adalah perlakuan dimana barang dan jasa sejenisnya yang diperlakukan berbeda dengan barang dan jasa sejenisnya yang diproduksi di dalam negeri sehingga perlu dibuat suatu matriks tersendiri.

Dalam Tabel 1-O dimana impor diperlakukan secara non kompetitif, maka impor dimasukkan kedalam kelompok baris sehingga matriks kebalikan Leontief dari tabel I-O dapat dijelaskan sebagai berikut:

$$X^d_{11} + X^d_{12} + X^d_{13} + \ldots\ldots\ldots\ldots {}^d_{ln} + F^d_{1n} = X_1$$

$$X^d_{21} + X^d_{22} + X^d_{23} + \ldots\ldots\ldots\ldots {}^d_{20} + F^d_{2} = X_2$$

$$X^d_{31} + X^d_{32} + X^d_{33} + \ldots\ldots\ldots\ldots {}^d_{3} + F^d_{3} = X_3$$

$$- \quad - \quad - \quad \ldots\ldots\ldots \quad - \quad - \quad -$$

$$- \quad - \quad - \quad \ldots\ldots\ldots \quad - \quad - \quad -$$

$$X^d_{n1} + X^d_{n2} + X^d_{n3} + \ldots\ldots\ldots X^d_{nn} + F^d_{n} = X_n \qquad 12\text{-}4$$

Dengan: X^d_{n1} = input antara domestik

F^d_1 = permintaan akhir terhadap ouput domestik.

Jika besarnya X_i dinyatakan dalam X_1 sebagai:

$$X_{ij} = a^d_{ij} X_j \qquad 12\text{-}5$$

dimana a_j: *direct input coeficient* dari sektor produksi i untuk sektor j yang menunjukkan kuantitas output sektor yang dibutuhkan oleh sektor j per unit outputnya.

$$a^d_{11} X_1 + a^d_{12} X_2 + a^d_{13} X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots a^d_{1n} X_n + F^d_1 = X_1$$

$$a^d_{21} X_1 + a^d_{22} X_2 + a^d_{23} X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots a^d_{2n} X_n + F^d_2 = X_2$$

$$a^d_{31} X_1 + a^d_{32} X_2 + a^d_{33} X_3 + d \ldots\ldots\ldots\ldots a^d_{3n} X_n + F^d_3 = X_3$$

$$- \quad - \quad - \quad \ldots\ldots\ldots \quad - \quad - \quad -$$

$$- \quad - \quad - \quad \ldots\ldots\ldots \quad - \quad - \quad -$$

$$a^d_{n1} X_1 + a_{n2} X_2 + a^d_{33} X_3 + \ldots\ldots a_{nn} X_n + F^d_n = X_n \qquad 12\text{-}6$$

atau dengan notasi matriks:

$A^d.X + F^d = X$

$[I - A^d].X = F^d$

$X = [I - A^d]^{-1} F^d$ 12-7

Dengan, F^d = vektor permintaan akhir domestik

A^d = matriks koefisien input domestik

$[I - A^d]^{-1}$ = matriks kebalikan Leontief

Contoh I. Perekonomian 3 sektor Negara Astina di bawah ini:

Tabel Transaksi Domestik Atas Harga Produsen (Hipotesis) Rupiah

O / I	Permintaan Antara			Permintaan Akhir (F)	Jumlah Output
	1	2	3		
1	15	30	25	50	120
2	20	15	20	30	85
3	25	30	18	27	100
Input antara	20	4	12		
Impor	10	2	10		
Nilai Tambah	30	4	15		
Jumlah input	1.200	85	100		

Jika perumusan akhir [F] untuk sektor 1, 2 dan 1 masing-masing berubah menjadi Rp.140,- Rp. 30,- dan Rp. 50,- tentukan output total masing-masing sektor dan susunlah kembali tabel transaksi domestik yang baru?

a. Koefisien input domestik $[A] = \begin{bmatrix} 0{,}125 & 0{,}353 & 0{,}250 \\ 0{,}267 & 0{,}176 & 0{,}200 \\ 0{,}208 & 0{,}353 & 0{,}180 \end{bmatrix}$

Koefisien input domestik dihitung menurut urutan kolom, bukan urutan baris berikut yaitu:

↓	↓	↓
0,125 = 15/120	0,353 = 30/35	0,250 = 25/100
0,167 = 20/120	0,176 = 15/85	0,200 = 20/100
0,208 = 25/120	0,353 = 30/85	0,180 = 18/100

b. Selanjutnya untuk menentukan nilai [I – A] dituliskan:

$$[I - A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}125 & 0{,}353 & 0{,}250 \\ 0{,}267 & 0{,}176 & 0{,}200 \\ 0{,}208 & 0{,}353 & 0{,}180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}875 & -0{,}353 & -0{,}250 \\ -0{,}167 & 0{,}824 & -0{,}200 \\ -0{,}208 & -0{,}353 & 0{,}820 \end{bmatrix}$$

c. Mencari bentuk kebalikan Leontief atau invers matriks dari matriks [I – A] yaitu $[I - A]^{-1}$.

i	J	Elemen	$[-]^{i+j}$	Minor M_{ij}	C_{ij}	det [I-A]
1	1	0,875	+1	$\begin{vmatrix} 0,824 & -0,200 \\ -0,353 & 0,820 \end{vmatrix} = 0,605$	0,605	
1	2	-0,353	-1	$\begin{vmatrix} -0,167 & -0,200 \\ -0,208 & 0,820 \end{vmatrix} = -0,179$	0,179	0,409
1	3	-0,250	+1	$\begin{vmatrix} -0,167 & 0,824 \\ -0,208 & 0,353 \end{vmatrix} = 0,230$	0,230	
2	1	-0,167	-1	$\begin{vmatrix} -0,353 & -0,250 \\ -0,353 & 0,820 \end{vmatrix} = -0,378$	0,378	
2	2	0,824	+1	$\begin{vmatrix} 0,875 & -0,250 \\ -0,208 & 0,820 \end{vmatrix} = 0,665$	0,665	0,409
2	3	-0,200	-1	$\begin{vmatrix} 0,875 & -0,353 \\ -0,208 & -0,353 \end{vmatrix} = -0,382$	0,382	
3	1	-0,208	+1	$\begin{vmatrix} -0,353 & -0,250 \\ -0,824 & -0,200 \end{vmatrix} = 0,277$	0,277	
3	2	-0,353	-1	$\begin{vmatrix} 0,875 & -0,250 \\ -0,167 & 0,200 \end{vmatrix} = -0,217$	0,217	0,409
3	3	0,820	+1	$\begin{vmatrix} 0,875 & -0,353 \\ -0,167 & -0,824 \end{vmatrix} = 0,662$	0,662	

Matriks kofaktor dan transposnya:

$$C = \begin{bmatrix} 0,605 & 0,179 & 0,230 \\ 0,378 & 0,665 & 0,382 \\ 0,277 & 0,217 & 0,662 \end{bmatrix} \rightarrow C = \begin{bmatrix} 0,605 & 0,378 & 0,277 \\ 0,179 & 0,665 & 0,217 \\ 0,230 & 0,382 & 0,662 \end{bmatrix}$$

Dari Bab XI dinyatakan bahwa adjoin suatu matriks tiak lain adalah transpos dari matriks kofakornya, yaitu:

$$\text{Adj } [I - A] = C' = \begin{bmatrix} 0,605 & 0,378 & 0,277 \\ 0,179 & 0,665 & 0,217 \\ 0,230 & 0,382 & 0,662 \end{bmatrix}$$

Sehingga invers dari matriks [I – A] adalah:

$$[I - A]^{-1} = \frac{\text{adj}[I - A]}{\det[I - A]} = \frac{1}{0,409} \begin{bmatrix} 0,605 & 0,378 & 0,277 \\ 0,179 & 0,665 & 0,217 \\ 0,230 & 0,382 & 0,662 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,605 & 0,378 & 0,277 \\ 0,179 & 0,665 & 0,217 \\ 0,230 & 0,382 & 0,662 \end{bmatrix}$$

d. Invers $[I - A]^{-1}$ secara matematik merupakan koefisien arah yang menghubungkan output X dengan permintaan akhir F yaitu, $X = [I - A]^{-1}.F$

$X_1 = 1,479\ F_1 + 0,924\ F_2 + 0,813\ F_3$

$X_2 = 0,437\ F_1 + 1,626\ F_2 + 0,530\ F_3$

$X_3 = 0{,}562\ F_1 + 0{,}934\ F_2 + 1{,}618\ F_3$

Pada, $F_1 = 140$, $F_2 = 30$ dan $F_3 = 50$ diperoleh

$X_1 = 268{,}8$ $X_1 = 136{,}5$ dan $X_3 = 188{,}0$

e. Permintaan Antara untuk masing-masing sektor yang baru adalah:

$$\begin{bmatrix} 0{,}125 & 0{,}353 & 0{,}250 \\ 0{,}267 & 0{,}176 & 0{,}200 \\ 0{,}208 & 0{,}353 & 0{,}180 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 268{,}8 \\ 136{,}5 \\ 188{,}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33{,}6 & 48{,}2 & 47{,}0 \\ 44{,}8 & 2{,}1 & 37{,}6 \\ 56{,}0 & 48{,}2 & 33{,}8 \end{bmatrix}$$

f. Input Antara untuk masing-masing sektor yang baru adalah:

Sektor 1 = 20/120 x 268,8 = 44,8

Sektor 2 = 4/85 x 136,5 = 6,4

Sektor 3 = 12/100 x 188,0 = 22,6

g. Nilai Tambah untuk masing-masing sektor yang baru:

Sektor 1 = 30/120 x 268,8 = 67,2

Sektor 2 = 4/85 x 136,5 = 6,4

Sektor 3 = 15/100 x 188,0 = 28,2

h. Import untuk masing-masing sektor yang baru:

Sektor 1 = 10/120 x 268,8 = 22,4

Sektor 2 = 2/85 x 136,5 = 32

Sektor 3 = 10/100 x 188,0 = 18,8

i. Tabel Transaksi Domestik Negara Astina Atas Harga Produsen yang Baru (Rp)

O / I	Permintaan Antara			Permintaan Akhir	Jumlah Output
	1	2	3		
1	33,6	48,2	47,0	140	268,8
2	44,8	24,1	37,6	30	136,5
3	56,0	48,2	33,8	50	188,0
Input antara	44,8	6,4	22,6		
Impor	22,4	3,2	18,8		
Nilai Tambah	67,2	6,4	28,2		
Jumlah input	268,8	136,5	188,0		

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Suatu perekonomian Negara Federasi Madjapahit yang disusun dalam 3 sektor ditunjukkan dalam tabel transaksi berikut ini:

   Tabel Transaksi Domestik Atas Harga Produsen (Hipotesis)

O / I	Permintaan Antara			Permintaan Akhir (F)	Jumlah Output
	A	B	C		
A	5	6	10	19	50
B	10	6	10	4	0
C	15	6	4	15	40
Input antara	4	4	7		
Impor	3	4	4		
Nilai Tambah	3	4	5		
Jumlah input	50	30	40		

a. Hitunglah masing-masing koefisien inputnya.

b. Jika Permintaan Akhir terhadap sektor A, B dan C diharapkan masing-masing berubah menjadi A = 20, B = 10 dan C = 20, tentukan output total masing-masing sektor dan susunlah kembali tabel transaksi domestik yang baru?

2. Untuk data serupa seperti soal-1, hitunglah output total per sektor jika permintaan akhir masing-masing sektor berubah menjadi A = 30, B = 25 dam C = 35.

3. Perekonomian 3 sektor Negara Sosialis ditunjukkan dalam tabel transaksi berikut ini:

O / I	Permintaan Antara			Permintaan Akhir (F)	Jumlah Output
	1	2	3		
A	12	5	10	10	37
B	6	20	10	20	56
C	6	10	10	30	56
Input antara	3	11	16		
Nilai Tambah	10	10	10		
Jumlah input	37	56	56		

Catatan: A = sektor pertanian
B = sektor industri dan perdagangan
C = sesktor jasa

a. Hitunglah masing-masing koefisien inputnya.

b. Jika Permintaan Akhir terhadap sektor A, B dan C diharapkan masing-masing berubah menjadi A = 20, B = 30 dan C = 40, tentukan output total masing-masing sektor dan susunlah kembali tabel transaksi domestik yang baru?

4. Untuk data serupa seperti soal-3, hitunglah output total per sektor jika permintaan akhir masing-masing sektor berubah menjadi A = 25, B = 25 dan C = 25, berapa kenaikan atau penurunan output total masing-masing sektor.

5. Kerjakan kembali seperti soal-3, hitunglah output total masing-masing sektor jika permintaan akhir untuk sektor pertanian naik menjadi A = 30, sektor industri dan perdagangan mengalami penurunan menjadi B = 15. Sedangkan sektor jasa

diperkirakan tetap sama yaitu C = 30. Berapakah kenaikan atau penurunan output total masing-masing sektor berikut.

6. Kerjakan kembali seperti soal-3, hitunglah output total masing-masing sektor jika data permintaan akhir untuk sektor pertanian mengalami kenaikan sebesar 10 persen, sektor industri dan perdagangan naik sebesar 15 persen dan sektor jasa naik sebesar 20 persen dan permintaan sebelumnya.
7. Perekonomian 3 sektor Negara Federasi Blambangan ditunjukkan dalam tabel berikut ini:

O / I	Permintaan Antara			Permintaan Akhir (F)	Jumlah Output
	A	B	C		
A	15	30	25	50	120
B	20	15	20	30	85
C	25	30	18	27	100
Nilai Tambah	60	10	37		
Produksi Bruto	120	85	100		

a. Anggaplah bahwa nilai tambah (*value added*) seluruhnya terdiri dari input primer tenaga kerja. Berapa banyak tenaga kerja yang diperlukan untuk mencapai permintaan akhir jika jumlah tenaga kerja yang tersedia dalam perekonomian tersebut sebanyak 150.
b. Jika permintaan akhir masing-masing sektor menjadi A = 140. B = 30 dan C = 50, berapa banyak tenaga kerja yang diperlukan untuk mencapai permintaan akhir tersebut.
c. Berkaitan dengan soal butir (b) apakah masyarakat mampu menyediakan sumber-sumber tenaga kerja produksi yang cukup jika tenaga kerja yang tersedia hanya sebanyak 150.

BAB XIII
PERSAMAAN DIFERENSIAL

13.1 PERSAMAAN DIFERENSIAL: DEFINISI

Persamaan diferensial (*differensial equation*) adalah persamaan yang melibatkan turunan-turunan diferensial suatu fungsi yang penyelesaiannya tidak lain adalah hubungan fungsional antara variabel-variabelnya. Dalam ilmu ekonomi, persamaan diferensial dimanfaatkan untuk menentukan syarat stabilitas dinamis dalam suatu model-model keseimbangan pasar (*market equilibrium*) maupun untuk menelusuri lintasan waktu pertumbuhan (*time parth of growth*) di bawah kondisi-kondisi tertentu.

Ordo (jenjang) persamaan diferensial ditunjukkan dari turunan tertinggi pada persamaan tersebut. Apabila persamaan diferensial ditulis sebagai polinomial dalam turunan-turunan, maka apa yang disebut derajat (*degree*) suatu persamaan diferensial adalah pangkar tertinggi dari turunan ordo tertinggi dalam suatu persamaan.

Contoh 1. Tentukan ordo dan derajat (pangkat) persamaan diferensial di bawah ini.

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 30x = 0$: Ordo kedua, derajat pertama
2. $\left[\frac{dy}{dx}\right]^4 + 5x^2 = 0$: Ordo kedua, derajat keempat
3. $\left[\frac{d^4y}{dx^4}\right]^3 + \left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]^6 - 5y = 0$: Ordo keempat, derajat ketiga
4. $\frac{d^2y}{dx} - 5\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]^3 + \frac{dy}{dx} = 8x = 0$: Ordo kedua, derajat pertama

Apabila persamaan diferensial hanya mempunyai satu variabel bebas berupa turunan biasa maka persamaan diferensial disebut persamaan diferensial biasa (*ordinary*). Sedangkan jika terdapat dua atau lebih variabel bebas, maka persamaan diferensial yang turunannya menjadi turunan parsial disebut persamaan diferensial parsial.

Bentuk umum dari persamaan diferensial linear dapat dituliskan:

$$A_0\frac{d^ny}{dx^4} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_ny = f(x) \qquad 13-1$$

13.2 PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDO SATU

Persamaan diferensial yang paling sederhana adalah persamaan diferensial ordo satu. Dilihat dari bentuk dan cara penyelesaiannya, persamaan diferensial ordo satu dapat dibedakan menjadi beberapa jenis yaitu:

13.2.1 Variabel yang Dapat Dipisahkan

Persamaan diferensial di mana variabel-variabelnya dapat dipisahkan adalah persamaan yang dapat diatur sehingga dapat dituliskan dalam bentuk yaitu:

$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$ 13-2

Penyelesaian persamaan ini dapat dilakukan secara langsung dengan mengintegralkan masing-masing sukunya menurut persamaan.

[M(x) dx + [N(y) dy = C (C suatu konstanta) 13-3

Contoh 2. Akan diselesaikan persamaan diferensial berikut:

1. $\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

   Dapat diubah dalam bentuk variabel yang dapat dipisahkan,

   $\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} + 6\,dx = 0$

   Dengan pengintegralan diperoleh:

   $\int \frac{dy}{dx} + \int 5dx = \ln C$ (C konstanta sembarang)

   Masing-masing ruas dinyatakan dalam bentuk persamaan eksponen dari e.

   $I^{nlyl + 6x} = e^{1n\,C} \rightarrow e^{lny.6x} = e^{in\,C}$

   $y \, . \, e^{dx} = C$

   Jadi, $y(x) = Ce^{-6x}$

2. $\frac{dy}{dx} = -\frac{8x}{y}$ dengan syarat batas y = 6 untuk x = 0,

   Dengan memisahkan variabel-variabel tersebut maka:

   $y\,dy = -8x\,dx \rightarrow y\,dy + 8x\,dx = 0$

   Dengan mengintegralkan masing-masing suku secara terpisah,

   $\int y\,dy + \int 8x\,dx = C \quad \rightarrow \frac{1}{2}y^2 + 4x^2 = C$

Syarat batas untuk y = 6 dan x = 0, maka C = $1/2(6)^2 + 0 = 18$

Diperoleh penyelesaian akhir, $1/2y^2 + 4x^2 = 18$ atau

$y(x) = \sqrt{(36 - 8x^2)}$

3. $\frac{1}{1+x}\,dx + \frac{1}{1+y}\,dy = 0$ dengan syarat batas y = 4 dan x = 3

Dengan mengintegralkan masing-masing ruas:

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx + \int \frac{1}{1+y}\,dy = 0 \text{ dengan syarat batas } y = 4 \text{ dan } x = 3$$

Dengan kaidah logaritma, (1 + x)(1 + y) = C

Pada syarat batas y = 4 dan x = 3, maka C = (1 + 2)(1 + 4) = 20

Penyelesaian akhir (1 + x)(1 + y) = 20, atau

$$y(x)\,\frac{20}{1+x} - 1$$

Contoh 3. Carilah fungsi permintaan Q = f(P) jika elastisitas permintaannya adalah $\in = -(P + P^2)/Q$ untuk Q = 4 apabila P = 4.

$$\in = \frac{dQ}{dP}.\frac{P}{Q} = -\frac{P+P^2}{Q} \rightarrow \frac{dQ}{dP} = -\frac{P+P^2}{P} = -(1+P)$$

Dengan memisahkan variabel-variabel tersebut, maka

$dQ = -(1 + P)\,dP \rightarrow dQ + (1 + P)\,dP = 0$

Pengintegralan, $\int dQ + \int (1 + P)\,dP = C$ maka, $Q + P + ½ P^2 = C$

Pada P = 4 dan Q = 4, diperoleh $C = 4 + 4 + ½ (4)^2 = 16$

Penyelesaian akhir adalah:

$Q(P) = 16 – P – ½ P^2$

13.2.2 Persamaan Linear

Persamaan diferensial linear ordo satu secara umum dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x) \qquad 13-4$$

Untuk Q(x) = 0, maka persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan cara pemisahaan variabel-variabelnya yaitu:

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y \text{ atau } \frac{dy}{dy} = -P(x)dx$$

dengan mengintegralkan masing-masing ruas, $\int \frac{dy}{dx} = a - \int P(x)\,dx$ memberikan:

$\ln y = -\int P(x)\,dx + C$, sehingga :

$$y = Ce^{-\int P(x)\,dx} \qquad 13\text{-}5$$

Untuk Q(x) = 0, maka terdapat penyelesaian yang disebut sebagai fungsi khusus (*particular* atau yp). Penyelesaian persamaan diferensial ini diperoleh dengan menggunakan faktor pengintegralan (*integrating factor*) yang merupakan suatu bilangan pengganda (*multiplier*) yang memungkinkan untuk pengintegralan persamaan.

Faktor pengintegralan adalah $e^{\int P(x)\,dx}$. Dengan faktor ini persamaan diferensial pada rumus 14-4 dapat ditulis kembali,

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + y.\,e^{\int P(x)dx}P(x) = Q(x).\,e^{\int P(x)dx}$$

Dengan mengatur kembali suku-sukunya, persamaan di atas dapat disusun menjadi,

$$\frac{d}{dx}[y\,.\;e^{\int P(x)dx}] = Q(x).\,e^{\int P(x)dx}$$

Lalu mengintegralkan masing-masing ruas:

$$y.e^{\int P(x)dx} = \int Q(x).\;e^{\int P(x)dx}dx + C$$

Dengan membagi ruas kanan dan kiri dengan faktor integralnya, maka penyelesaian akhir:

$$y = e^{\int P(x)dx}\,.\int Q(x).\;e^{\int P(x)dx}\,dx + C\,.\;e^{-\int P(x)dx} \qquad 13\text{-}6$$

Jika P(x) = m (m suatu bentuk tetapan), maka rumus 14-6 menjadi bentuk yang lebih sederhana:

$$y = e^{-mx}\,.\int Q(x)\cdot e^{mx}\,dx + C.e^{-mx}$$

$$y = e^{-mx}\,[C + \int Q(x).e^{mx}dx] \qquad 13.7$$

Jika Q(x) = 0, penyelesaiannya tidak lain adalah: $y = C.e^{-mx}$

Contoh 4. Gunakan 13-7 rumus penyelesaian umum untuk memecahkan persamaan diferensial linear berikut ini:

1. $\frac{dy}{dx} + 2xy = 8x$

   Dengan P(x) = 2x dan Q(x) = 8x, persamaan diferensial linear mempunyai faktor integrasi yaitu,

$e^{\int P(x)dx} = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$

Dengan mensubstitusikan pada rumus 14-7:

$$y = e^{-mx}\left[C + \int Q(x)e^{mx}\,dx\right] = e^{-x^2}\left[C + \int 8x\,e^{x^2}\,dx\right]$$

Hasil integral ruas kanan suku terahir $\int 8x\,e^{x^2}\,dx = 4.e^{x^2}$ sehingga:

$$y = e^{-x^2}\left[C + \int Q(x)\,e^{-x^2}\right] = C\,.\,e^{-x^2} + 4$$

Syarat batas y = 14 untuk x = 0 diperoleh C = 10, sehingga:

$y(x) = 10^{-x^2} + 4$

2. $x\frac{dy}{dx} - y = x$ Selesaikan persamaan diferensial ini!

   Dapat dibentuk menjadi: $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 1$

   Dengan P(x) = -1/x dan Q(x) = 1, persamaan diferensial linear mempunyai faktor integrasi:

   $e^{\int P(x)dx} = e^{\int -1/xdx} = e^{-1n\,x} = e^{\ln(1/x)}$

   Dengan mensubstitusikan pada rumus 14-7 diperoleh:

   $$y = e^{-mx}\left[C + \int Q(x)\,.\,e^{mx}dx\right] = e^{\ln x}\left[C + \int e^{-\ln}\,dx\right]$$

   Karena: $e^{-\ln x} = e^{\ln(1/x)} = 1/x$ dan $e^{\ln x} = x$, maka:

   $$y = x\left[C + \int \frac{1}{x}dx\right] = Cx + x\,\text{In}\,|x|$$

   Pada y = 5 untuk x = 1 diperoleh C = 5 sehingga penyelesaiannya: y(x) = 5x + x |n|x|

3. $\frac{dy}{dx} - 6xy = e^{3x^2}$ selesaikan persamaan diferensial tersebut!

   Dengan P(x) = -6x dan Q(x) = e^{3x^2} faktor integrasi adalah:

   $e^{\int P(x)dx} = e^{\int -6x\,dx} = e^{-3x^2}$

   Sehingga diperoleh:

   $$y = e^{3x^2}\left[C + \int e^{3x^2}\,.\,e^{-3x^2}dx\right] = Ce^{3x^2} + e^{3x^2}\int dx$$

   dimana e° = 1 dan (dx = x. Dengan mensubstitusikan kembali,

   $y = Ce^{3x^2} + xe^{3x^2}$

   Pada y = 2 dan x = 0, diperoleh C = 2. Jadi, y(x) = (2 + x) e^{3x^2}

13.2.3 Persamaan Diferensial Eksak

Suatu persamaan diferensial yang dapat dituliskan dalam bentuk:

M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 13-8

Dapat disebut sebagai persamaan diferensial eksak (*exact differential equation*) yaitu apabila M(x,y) dan N(x,y) sebagai turunan parsial dari fungsi primitif (*primitive function*). F(x,y) menurut persamaan:

$$dF = \frac{\delta F}{\delta x}dx + \frac{\delta F}{\delta y}dy = 0$$

sedemikian rupa sehingga: M(x,y) = $\frac{\delta F}{\delta x}$ dan N(x,y) = $\frac{\delta F}{\delta y}$ 13-9

Penyelesaian persamaan diferensial eksak dilakukan secara berturutan berkaitan dengan satu variabel pada satu saat dan lainnya dianggap konstan. Dengan demikian mengharuskan:

$$\frac{\delta^2 F}{\delta x\,\delta y} = \frac{M(x.y)}{\delta x} = \frac{\delta N(x,y)}{\delta x} \qquad 13-10$$

Rumus di atas dapat dipakai untuk mengecek apakah suatu persamaan diferensial itu eksak atau tidak. Sebagai contoh dapatlah diselidiki persamaan diferensial berikut ini:

Contoh 5. Selesaikan persamaan diferensial berikut ini:

(4y + 6x)dx + (4x – 2)dy = 0

1. Untuk persamaan ini ternyata:

   $$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = 4y + 6x \rightarrow \dfrac{\delta M(x,y)}{\delta y} = 4 \\ M(x,y) = 4x - 2 \rightarrow \dfrac{\delta M(x,y)}{\delta x} = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\delta M/\delta y = \delta N/\delta x \\ \text{(persamaan diferensial eksak)}\end{array}$$

   Jika persamaan diferensial tersebut eksak maka penyelesaiannya akan mengikuti persamaan berikut ini. Perhatikan bahwa operator δx akan menggantikan dx dalam pengintegralan parsialnya:

   F(x,y) = $\int(4y + 6x)\delta x + P(y) = 4xy + 3x^2 + P(y)$

2. Diferensialkan F(x,y) secara parsial terhadap y dan samakan dengan N(x,y) di atas:

   $$\frac{\delta M(x,y)}{\delta y} = 4x + P(y)$$

Akan tetapi, δF(x,y)/δy = N(x,y) = (4x – 2), sehingga:

4x + P'(y) = 4x – 2 diperoleh P'(y) = -2

3. Integralkan P'(y) terhadap y untuk memperoleh suku y yang hilang. P(y) = ∫P'(y) dy = ∫-2 dy = -2y
4. Substitusikan harga P(y) = -2y dengan menambahkan suatu konstanta pengintegralan C pada F(x,y). Jadi,

   $F(x,y) = 4xy + 3x^2 – 2y + C$

Contoh 6. Selesaikan persamaan diferensial berikut ini:

$(2xy + y + 1)dx + (x^2 + x – 6)dy = 0$

1. Untuk persamaan ini ternyata:

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = 2xy + y + 1 \rightarrow \dfrac{\delta M(x,y)}{\delta y} = 2x + 11 \\ M(x,y) = x^2 + x - 6 \rightarrow \dfrac{\delta M(x,y)}{\delta x} = 2x + 1 \end{array}\right\} \delta M/\delta y = \delta N/\delta x$$

F(x,y) = ∫(2xy + y + 1)δx + P(y) = x^2y + xy + x + P(y).

2. Diferensialkan F(x,y) secara parsial terhadap y dan samakan dengan N(x,y):

$$\frac{\delta F(x,y)}{\delta y} = 4x + P(y)$$

Akan tetapi δF(x,y)/δy = N(x,y) = (4x – 2), sehingga

4x + P(y) = 4x – 2 diperoleh P(y) = -2

3. Integralkan P(y) terhadap y untuk memperoleh suku y yang hilang.

   P(y) = ∫P(y) dy = ∫-2 dy = -2y
4. Substitusikan harga P(y) = -2y dengan menambahkan suatu konstanta pengintegralan C pada F(x,y). Jadi,

   $F(x,y) = 4xy + 3x^2 – 2y + C$

Contoh 6. Selesaikan persamaan diferensial berikut ini:

$(2xy + y + 1)\ dx + (x^2 + x – 6)dy = 0$

1. Untuk persamaan ini ternyata:

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = 2xy + y + 1 \rightarrow \dfrac{\delta M(x,y)}{\delta y} = 2x + 11 \\ M(x,y) = x^2 + x - 6 \rightarrow \dfrac{\delta M(x,y)}{\delta x} = 2x + 1 \end{array}\right\} \delta M/\delta y = \delta N/\delta x$$

$F(x,y) = \int(2xy + y + 1)\delta x + P(y) = x^2y + xy + x + P(y)$.

2. Diferensialkan F(x,y) secara parsial terhadap y dan samakan dengan N(x,y):

   $$\frac{\delta F(x,y)}{\delta y} = x^2 + P(y)$$

   Akan tetapi $\delta F(x,y)/\delta y = N(x,y) = x^2 + x - 6$, sehingga

   $x^2 + x + P(y) = x^2 + x - 6 \rightarrow P(y) = -6$

3. Integralkan P(y) terhadap y untuk memperoleh suku y yang hilang.

   $P(y) = \int P(y)\, dy = \int -6\, dy = -6y$

4. Substitusikan harga P(y) = -6y. Jadi,

   $F(x,y) = x^2y + xy + x - 6y$

13.3 FAKTOR PENGINTEGRALAN

Jika persamaan diferensial tidak eksak atau tidak memenuhi syarat batas $\delta M(x, y)/\delta dx \neq \delta N(x,y)\delta x$, maka persamaan diferensial dapat dibuat eksak dengan mengunakan faktor pengintegralan (*integrating/faktor*).

Ada dua macam kaidah mencari faktor pengintegralan yang memungkinkan dipenuhinya syarat $\delta M(x,y)/\delta dx = \delta N(x,y)/\delta x$ yaitu:

1. Jika: $\frac{1}{N}\left[\frac{\delta M(x,y)}{\delta y} - \frac{\delta N(x,y)}{\delta y}\right] = g(x)$

   Maka faktor integralnya adalah: $e^{\int g(x)\, dx}$

2. Jika: $\frac{1}{M}\left[\frac{\delta N(x,y)}{\delta y} - \frac{\delta M(x,y)}{\delta y}\right] = h(x)$

   Maka faktor integralnya adalah: $e^{\int g(x)\, dx}$ 13-11

Contoh 7. Selesaikan persamaan diferensial berikut ini:

$(5xy + x)\, dx + (5x^2)dy = 0$

1. M(x,y) = 5xy + N(x,y) = $5x^2$ dan

   $(\delta M/\delta y = 5x) \neq (\delta N/\delta x = 10x)$

   Persamaan di atas bukan persamaan diferensial eksak sehingga perlu mencari faktor integrasinya:

   Dengan kaidah 1:

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\delta M(x,y)}{\delta y} - \frac{\delta N(x,y)}{\delta y}\right] = \frac{1}{5x^2}[5x - 10x] = \frac{-5x}{5x^2} = -(1/x)$$

Dengan kaidah 2:

$$\frac{1}{M}\left[\frac{\delta N(x,y)}{\delta y} - \frac{\delta M(x,y)}{\delta y}\right] = \frac{1}{5y+x}[10x - 5x] = \frac{5x}{5xy+x}$$

Yang dipilih adalah Kaidah 1 karena merupakan fungsi x semata.

Sedangkan pada Kaidah 2 bukan merupakan fungsi x karena masih ada variabel y (pada penyebutnya). Jadi, faktor integralnya adalah:

$$e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = e^{-\ln(1/x)} = 1/x$$

Dengan mengalihkan faktor pengintegralan yaitu 1/x, maka:

$1/x \cdot [(5xy + x)dx + (5x^2)dy] = 0$ menjadi,

$(5y + 1)dx + 5x\, dy = 0$

Di mana M = 5y + dan N = 5x dan $\delta M/\delta y = 5 = \delta N/\delta x$. Selanjutnya dengan fungsi yang baru, penyelesaian dapat dilakukan seperti pada persamaan diferensial eksak.

$F(x,y) = \int(5y + 1)\delta x + P(y) = 5xy + x + P(y)$

2. Diferensialkan F(x,y) secara parsial terhadap y:

   $\frac{5x}{5xy+x} = 5x + P(y) = 5x$ diperoleh $P(y) = 0$

3. Karena P(y) = 0, maka integral P(y) menghasilkan suatu konstanta C.

   $P(y) = \int P'(y)\, dy = C$

4. Substitusikan harga P(y) = C pada F(x,y). Jadi,

   $F(x,y) = 5xy + x + C$

13.4 PERSAMAAN DIFERENSIAL HOMOGEN

Suatu persamaan diferensial disebut persamaan diferensial homoggen apabila jumlah pangkat diferensial beserta variabel tiap-tiap suku sama. Dengan kata lain persamaan diferensial, dikatakan homogeny apabila M(x,y) dan N(x,y) masing-masing merupakan fungsi homogeny dengan jumlah pangkat suku-suku dalam M(x,y) sama dengan jumlah suku-suku dalam N(x,y). Persamaan diferensial apabila dituliskan dalam bentuk:

$$F(x,y) = \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

Akan menghasilkan fungsi F(x,y) yang homogen dengan jumlah pangkat yang sama dengan nol. Dapat juga dituliskan,

F(x,y) = f(y/x) atau F(x,y) = f(z) dengan z = y/x

Diferensial total memberikan: dy = z dx + x dz, maka:

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} \quad \text{atau} \quad f(z) = z + x\frac{dz}{dx}$$

Dengan mengatur kembali suku-sukunya menjadi,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z) - z}$$

Pada pengintegralan masing-masing ruas menghasilkan penyelesaian:

$$\ln x = \frac{dy}{dx} \qquad 13 - 12$$

Contoh 9. Selesaikan persamaan diferensial homogeny berikut:

x^2 dy + y^2 dx – xy dy = 0

Diubah menjadi, (x^2 – xy) dy = -y^2 dx sehingga:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2 - xy} = -\frac{(y/x)^2}{I - (x/y)} = \frac{z^2}{I - z}$$

Dengan memasukkan f(z) = z^2/(I – z) pada rumus di atas, maka

$$\ln x = \int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dz}{\frac{-z^1}{I - z} - z} = \int \frac{z - 1}{z}$$

$$= \int dz - \int \frac{I}{z} dz = z - \ln + C \text{ selanjutnya menjadi:}$$

ln x + ln z = z + C ....1)

Dengan mensubstitusikan harga z = y/x dan memasukkan pada persamaan (1) diperoleh:

ln x + ln (y/x) = ln [x.(y/x)] = (y/x) + C

ln y = y/x + C

Jadi, y = A $e^{(y/x)}$

13.5 PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDO DUA

Persamaan diferensial dibatasi sampai pada ordo dua saja. Persoalan akan melebar dan tidak bermanfaat jika materi persamaan diferensial diberikan terlalu banyak disamping juga aplikasinya dalam teori-teori ekonomi tidak banyak dijumpai.

Bentuk umum persamaan diferensial ordo dua adalah:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x) \qquad 13-13$$

Apabila P(x) = b; Q(x) = c dan R(x) = a ≠ 0 (di mana a, b dan c suatu konstanta), persamaan di atas dapat dituliskan kembali menjadi,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = a$$

Penyelesaian persamaan di atas terdiri daridua bagian yaitu fungsi komplementer (*complementer function* atau y_c) dan integral partikelir/ khusus (*particular* atau y_p) yang dijumlahkan yaitu $y(x) = y_c + y_p$.

A. Fungsi Komplementer

Dengan menuliskan d/dx = D (operator diferensial), maka rumus di atas menjadi persamaan kuadrat dalam D yang difaktorkan dalam bentuk:

$(D - m_1)(D - m_2)\ y = R(x)$

Untuk R(x) = 0 maka,

$(D - m_1)(D - m_2)\ y = 0$ (persamaan karakteristik)

Di mana akar-akar karakteristik $m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4c)}}{2}$

Penyelesaian fungsi komplementer adalah sebagai berikut:

$$y_c = C_1e^{m1c} + C_2e^{m2x} \qquad 13-14$$

Jika akar-akar karakteristik berulang ($m_1 = m_2$) dengan mengasumsikan (b^2 – 4c) = 0 maka penyelesaian fungsi komplementernya menjadi.

$$y_c = C_1xe^{m1x} + C_2e^{m2x} \qquad 13-15$$

B. Integral Partikelir

Penyelesaian fungsi integral partikelir dapat dibedakan dari konstanta-konstantanya yaitu:

1. $y_p = \frac{a}{c}$ untuk c ≠ 0
2. $y_p = \frac{ax}{b}$ untuk c = 0 dan b ≠ 0
3. $y_p = \frac{1}{2}ax^2$ untuk b = c = 0 13-16

Contoh 10. Selesaikan persamaan diferensial dua berikut ini:

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 5y = 15$

   a. Akar-akar karakeristik fungsi komplementer (a = 15, b = 6 dan c = 5)

   $$\text{jadi}, m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4k)}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{((6)^2 - 4.5)}}{2}$$

   diperoleh m_1 = -1 dan m_2

   $y_c = C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{-5x}$

   b. Pada a = 15, c = 5 ≠ 0, maka dengan mensubstitusikan pada rumus 13-16 butir (1), penyelesaian integral partikelnya adalah:

   $y_p = a/c = 15/5 = 3$

   c. Penyeleaian umum persamaan diferensial adalah

   $y = y_c + y_p = C_1\, e^{-c} + C_2\, e^{-5e} + 3$

2. $2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} = 8$ selesaikan persamaan diferensial tersebut.

   Dapat ditulis menjadi: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 4$

   a. Akar-akar karakeristik fungsi komplementer (a = 4, b = -2 dan c = 0)

   $$m_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{((2)^2 - 4.0)}}{2} \text{ diperoleh } m_1 = 2 \text{ dan } m_2 = 0. \text{Jadi:}$$

   $y_c = C_1\, e^{2x} + C_2$

   b. Pada a = 4, b = -2, c = 0 dan dengan mensubstitusikan pada rumus 13-16 butir (2), penyelesaian integral partikelnya adalah:

   $y_p = ax/b = 4x/-2 = -2x$

   c. Penyeleaian persamaan diferensial secara umum adalah

   $y = y_c + y_p = C_1\, e^{2c} + C_3 - 2x$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} = 9$. Selesaikan persamaan diferensial tersebut.

   a. Akar-akar karakeristik fungsi komplementer (a = 9, b dan c = 0)

   $$m_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{((0)^2 - 9.0)}}{2} \rightarrow m_1 = m_2 = 0 \text{ (akar − akar berulang)}.$$

   $y_c = C_1\, xe^0 + C_2\, e^0 = C_1\, x + C_2$

   b. Pada a = 9, penyelesaian integral partikelnya (rumus 14-16 butir 3)

   $y_p = ½ax^2 = ½(9)x^2 = 4,5x^2$

c. Jadi, penyelesian umum persamaan diferensial adalah

$y = C_1 + C_2 + 4{,}5x^2$

4. $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} - 20y = 0$

a. Akar-akar karakeristik (a = 0, b = -8 dan c = -20)

$$m_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{((8)^2 + 4.20)}}{2} = \frac{8 \pm 12}{2} \rightarrow m_1 = 10 \text{ dan } m_2 = -2.$$

Jadi

$y_c = C_1\, e^{10x} + C_2\, e^{-2x}$

b. Pada a = 0, b = -8 dan c = -20, integral partikelnya $y_p = 0$

c. Jadi, penyelesian umum persamaan diferensial adalah

$y = y_1 + y_p = C_1\, xe^{-5x} + C_2e^{-5x}$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Tentukan odo dan derajat (pangkat) persamaan-persasmaan diferensial di bawah ini:

a. $x\frac{d^2y}{dx^2} - 9\frac{dy}{dx} = 40x$

b. $6\frac{d^2y}{dx^3} + \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]^3 + \frac{dy}{dx} = 7x$

2. Selesaikan persamaan diferensial ordo satu berikut dengan cara variabel yang dapat dipisahkan:

a. $y\frac{dy}{dx} = a - 10x$

b. $\frac{1}{8-x}\,dx = -\frac{1}{1+y}\,dy$ dengan syarat x = 6 dan y = 4

3. Gunakan rumus penyelesaian umum untuk memecahkan persamaan diferensial linear ordo satu berikut ini:

a. $\frac{dy}{dx} - 2y = 12x$

b. $\frac{dy}{dx} - 3y = 9x$

c. $\frac{dy}{dx} - 2xy - e^{x^2} = 12x$

4. Selidikilah apakah persamaan diferensial ordo satu berikut ini merupakan persamaan diferensial eksak atau tidak. Selesaikan persamaan diferensial tersebut.
   a. $(3y - 6x)dx + (8 + 3x)dy = 0$
   b. $(4y)dx - (2x)dy = 0$
   c. $(2xy - 3y)dx + (x^2 - 3x + 1)dy = 0$
   d. $(6xy - 1)dx + (6x)dy = 0$
   e. $(5x + 8y)dx + (8x - y)dy = 0$
5. Selesaikan persamaan diferensial homogeny berikut:
   a. $\left[\frac{y^2}{x}\right]dx + (x - y)dy = 0$
   b. $x^3 \left[\frac{dy}{dx}\right] + 5x^2y - xy^2 = 0$
   c. $4y^2 - xy + x^2 \left[\frac{dy}{dx}\right] = 0$
   d. $30y + x \left[\frac{dy}{dx}\right] = 0$
   e. $6x\,dx - 4y\,dy = 0$
   f. $4y\,dx + 6x\,dy = 0$
   g. $(x^2 + 4xy)dy - y^2\,dx = 0$
6. Gunakan penyelesaian dengan mencari akar-akar karakteristik fungsi komplementer dan penyelesaian integral partikel untuk persamaan diferensial ordo dua berikut ini:
   a. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 30$
   c. $\frac{d^2y}{dx^2} = 81$
   b. $2\frac{d^2y}{dx^2} + 2 = 10\frac{dy}{dx}$
   d. $2\frac{d^2y}{dx^2} + 16\frac{dy}{dx} = 40y$
   c. $\frac{d^2y}{dx^2} = 25$
   f. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 4y = 0$
7. Selesaikan persamaan diferensial ordo dua di bawah ini dengan penyelesaian tertentu (definit) yaitu menetapkan pada x = 0 dan mengevaluasi nilai y(0) dan y'(0) dari syarat awalnya.
   a. $\frac{d^2y}{dx^2} + 16\left[\frac{dy}{dx}\right] = 32x$ pada $y(0) = 2$; $y'(0) = -14$
   b. $\frac{d^2y}{dx^2} + 25\left[\frac{dy}{dx}\right] = 75$ pada $y(0) = 3$; $y'(0) = -22$

c. $\frac{d^2y}{dx^2} = 144$ pada $y(0) = 3$; $y'(0) = 2$

d. $\frac{d^2y}{dx^2} = 100$ pada $y(0) = 5$; $y'(0) = 35$

e. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left[\frac{dy}{dx}\right] + 4y = 8$ pada $y(0) = 4$; $y'(0) = -5$

f. $\frac{d^2y}{dx^2} + 10\left[\frac{dy}{dx}\right] + 16y = 16$ pada $y(0) = 3$; $y'(0) = -10$

g. $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\left[\frac{dy}{dx}\right] + 5y = 20$ pada $y(0) = 2$; $y'(0) = -33$

BAB XIV
PERSAMAAN DIFERENSI

14.1 PERSAMAAN DIFERENSI: DEFINISI

Persamaan diferensi (*difference equation*) adalah persamaan yang melibatkan hubungan fungsional antara variabel tak bebas dan variabel bebas bersenjang (*langged independent*) yang berubah pada interval waktu. Seperti halnya persamaan diferensial, dalam ilmu ekonomi, persamaan diferensi dimanfaatkan untuk menentukan syarat stabilitas dinamis dalam suatu model-model keseimbangan pasar maupun untuk menelusuri lintasan waktu pertumbuhan (diskrit) di bawah kondisi-kondisi tertentu.

Diferensi Δt dari variabel t adalah perubahan t apabila t bertambah (berkurang) dari nilai t_0 menjadi nilai t_1 di dalam daerah definisinya ($\Delta t = t_1 - t_0$). Apabila terjadi perubahan dari t menjadi t+1 yang mengakibatkan fungsi y = f(y) berubah dari $y_1 = f(t)$ menjadi $y_{1+1} = f_{(t+1)}$ maka hasil bagi diferensi fungsi pada interval t dan t+1 dapat ditulis.

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = y_{t+1} - y_1 \qquad 14-1$$

Perlu diingat bahwa pada persamaan diferensial variabel x menjalani nilai-nilai kontinu, sedangkan pada persamaan diferensi variabel t menjalani nilai-nilai diskrit, t = 0, 1, 2, 3, (t bilangan bulat).

14.2 PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSI

Suatu persamaan diferensi jenjang pertama linear di mana variabel tidak bebas berpangkat tidak lebih dari satu dapat dituliskan:

$$Y_{1+1} = \beta y_t + \alpha \qquad 14-2$$

di mana a dan β adalah konstanta. Dengan menggeser periode waktu sebanyak satu periode ke belakang untuk penyesuaian, maka persamaan 15-2 menjadi,

$$y_1 = \beta y_{t-1} + \alpha \qquad 14-3$$

Subkrip t menjelaskan periode waktu (diskrit).

Ada 3 (tiga) macam penyelesaian persamaan diferensi yaitu: *Pertama*, Penyelesaian Tertentu (*definit*). Penyelesaian tertentu berupa fungsi dari t yang mendefinisikan nilai y pada tiap periode waktu sekaligus memenuhi persamaan diferensi maupun syarat-syarat awal. yang Bentuk umum penyelesaian definit diberikan:

Pada $t = 1, y_1 = \beta y_0 + \alpha = [y_0 - \frac{\alpha}{1-\beta}]\beta + \frac{\alpha}{1-\beta}$

Pada $t = 2, y_2 = \beta y_1 + \alpha = \beta[\beta y_0 + \alpha] + \alpha = [y_0 - \frac{\alpha}{1-\beta}]\beta^2 + \frac{\alpha}{1-\beta}$

Pada $t = 3, y_3 = \beta y_2 + \alpha = \beta[\beta^2 y_0 + \beta\alpha + \alpha] + \alpha$

$$y_3 = [y_0 - \frac{\alpha}{1-\beta}]\beta^3 + \frac{\alpha}{1-\beta}$$

Jika lintasan waktu diskrit ke-t maka penyelesaian persamaan diferensi tertentu adalah:

$$y_t = [y_0 - \frac{\alpha}{1-\beta}]\beta^1 + \frac{\alpha}{1-\beta} \quad \text{untuk } \beta \neq 1 \qquad 14-4$$

$$y_1 = y_0 + \alpha t \quad \text{untuk } \beta = 1 \qquad 14-5$$

Kedua, Penyelesaian Umum: berupa fungsi dari t yang memeuhi persamaan diferensi dan tidak mengandung bentuk diferensi yang manapun, akan tetapi mengandung tetapan sembarang. Jika tidak ada syarat awal yang diberikan rumus 14-4 menjadi :

$$y_t = A\beta^1 + \frac{\alpha}{1-\beta} \quad \text{untuk } \beta \neq 1 \qquad 14-6$$

di mana $A = [y_0 - \alpha/(1-\beta)]$ aalah tetapan sembarang atau disebut juga fungsi komplementer.

Ketiga, Penyelesaian Khusus/Partikelir: berupa fungsi dari t yang diperoleh dari penyelesaian umum dengan memberi nilai tertentu yang tetapan sembarangannya yaitu $[y_n - \alpha(1-\beta)]\beta^1 = 0$. Dengan demikian penyelesaian khusus/partikelir dapat dinyatakan:

$$y_1 = \frac{\alpha}{1-\beta} \quad \text{untuk } \beta \neq 1 \qquad 14-7$$

Contoh 1. Pecahkan persamaan diferensi $y, = 3y_{t-1} + 8$ jika syarat awal diketahui yaitu $y_0 = 5$ dan selidikilah jawaban anda dengan menggunakan t = 0 dan t = 1.

a. Penyelesaian persamaan diferensi dapat dipecahkan dengan menggunakan rumus 15-4. Karena $\beta \neq 1$, $\alpha = 8$ dan $y_0 = 5$, maka:

$$y_1 = [y_0 - \frac{\alpha}{1-\beta}]\beta^1 + \frac{\alpha}{1-\beta} = [5 - \frac{8}{1-3}]3^t = \frac{8}{1-3} = 9(3)^t = -4$$

b. Jawaban di atas diperiksa dengan mensubstitusikan t = 0 dan t = 1

Pada t = 0, $y_0 = 9(3)^0 - 4 = 9 - 4 = 5$

Pada t = 1, $y_1 = 9(3)^1 - 4 = 27 - 4 = 23$

Dengan mensubstitusikan $y_1 = 23$ untuk y_t dan $y_t = 5$ untuk y_{t-1} pada persamaan asal akan terlihat bahwa:

$23 = 3y_{t-1} + 8 = 3(5) + 8 = 15 + 8$ cocok

Cocok 2. Kerjakan kembali persamaan diferensiasi $y_{t+6} = y_{t+5} - 4$. Selidikilah jawaban anda dnegan menggunakan t = 0 dan t = 1.

a. Dengan menggeser periode waktu sebanyak enam period ke belakang untuk penyesuaian, maka persamaan tersebut menjadi $y_t = y_{t-1} - 4$.

Karena $\beta = 1$ dan $\alpha = -4$ penyelesaian menggunakan rumus (14-5) yaitu:

$y_t = y_0 + \alpha t = y_0 - 4t = A - 4t$

b. Diperika dengan mensubstitusikan t = 0 dan t = 1

Pada t = 0, $y_0 = A - 4(0) = A$

Pada t = 1, $y_t = A - 4(1) = A - 4$

Dengan mensubstitusikan $y_1 = A - 4$ untuk y_1 dan $y_0 = A$ untuk y_{t-1} pada persamaan asal akan terlihat bahwa:

$A - 4 = y_{t-1} - 4 = A - 4$ cocok

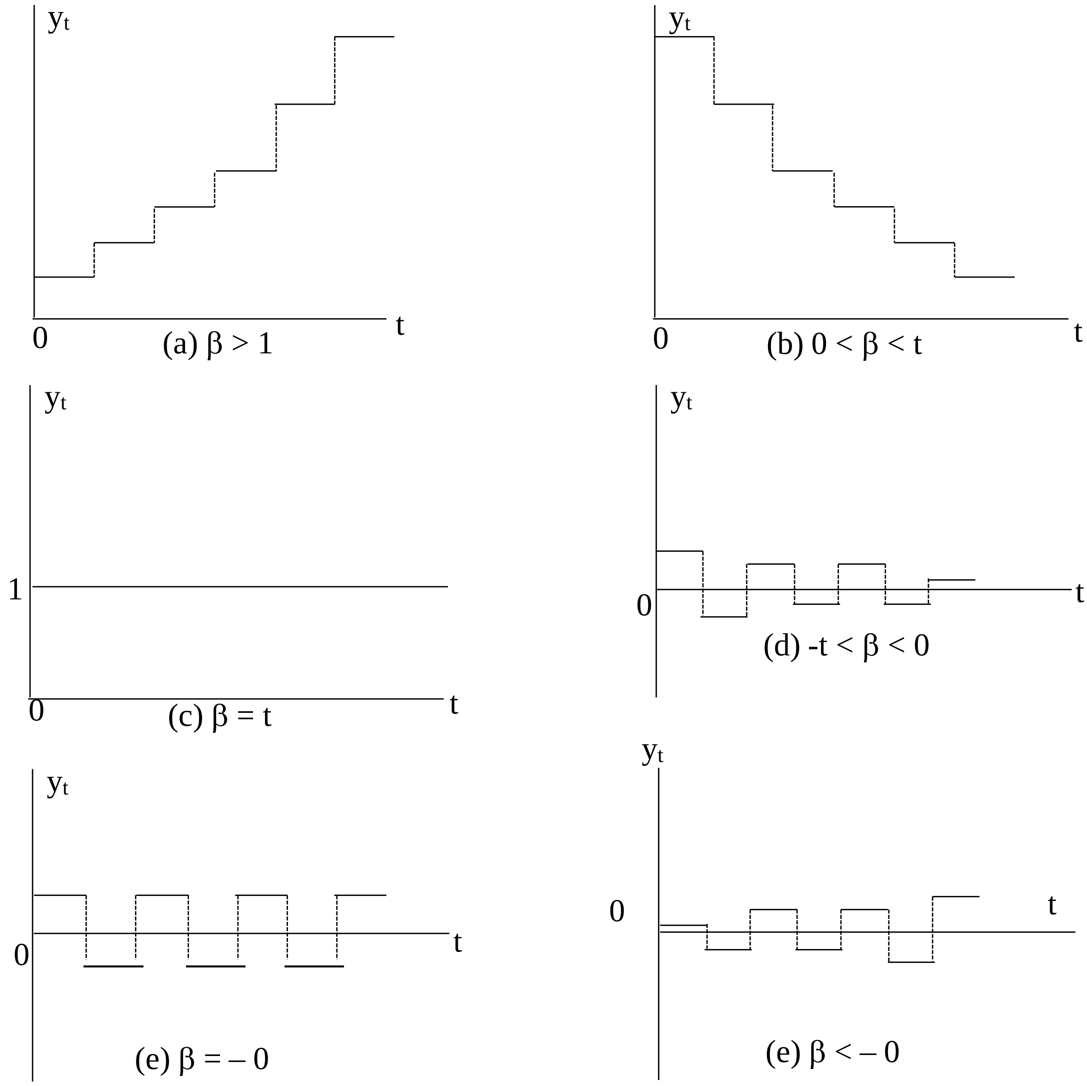
14.3 STABILITAS DINAMIS

Penyelesaian umum persamaan diferensi (rumus 15-6) dapat juga ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana.

$$y_t = A\beta^t + K \qquad 14\text{-}8$$

Di mana, $K = \alpha/(I - \beta)$ adalah penyelesaian khusus/partikelir yang menyatakan tingkat keseimbangan antar waktu. Sedangkan $A = [y_0 - \alpha/(1 - \beta)]\beta^t$ seperti yang telah dijelaskan di atas dinyatakan sebagai penyimpangan dari pola keseimbangan. Dengan demikian, rumus 14-8 akan *dinamis stabil* jika fungsi komplementasinya sama dengan nol ($A\beta^t \to 0$).

Secara geometris, kurva lintasan antar waktu (rumus 14-8), menghasilkan beberapa pola yang berbeda tergantung dari nilai basis β. Dengan mengasumsikan K = 0 dan A = 1, maka lintasan antar waktu dapat dilukiska sebagai berikut:



Gambar 14.1 Lintasan Antarwaktu $Y_1 = A\beta^t + K$

Dari Gambar 15-1 di atas terlihat bahwa, jika:

$|\beta| > 1$: lintasan waktu meledak (divergen)

$|\beta| < 1$: lintasan waktu menyatu (konvergen)

$\beta < 0$: lintasan waktu berosilasi

$\beta > 0$: lintasan waktu tidak berosilasi

Jika A ≠ -1 : Jika, A#1: konstanta pengali akan menaikkan (menurunkan) besaran tetapi tidak akan mengubah pola dasar gerakan lintasan waktunya.

A = -1 : lintasan waktu merupakan suatu bayangan terbalik terhadap sumbu datar.

K ≠ 1 : titik potong pada sumbu tegak akan bergeser ke atas atau ke bawah.

Contoh 3. Selesaikan persamaan diferensi $y_1 = -5_{y-1} + 24$ jika syarat awal diberikan $y_0 = 10$. Selidikilah jawaban anda dengan menggunakan t = 0 dan t = 1 dan bagaimana stabilitas lintasan waktunya.

a. Dengan menggunakan rumus (15-4) diperoleh:

$$y_t = [10 - \frac{24}{1+5}]\, 5^t + \frac{24}{1+5} = 6(-5)^t + 4$$

b. Pada t = 0, $y_0 = 6(-5)^\circ + 4 = 10$

Pada t = 1, $y_1 = 6(-5)^1 + 4 = -30 + 4 = -26$

Dengan mensubstitusikan $y_1 = -26$ untuk y, dan $y_o = 10$ untuk y_{t-1} pada persamaan asal akan terlihat bahwa:

$-26 = -5y_{1-1} + 24 = -5(10) + 24 = -50 + 24$ cocok

c. Karena ß = -5 < 0 dan $|\beta| > 1$, maka lintasan waktu berosilasi dan meledak (divergen).

Contoh 4. Selesaikan persamaan diferensi $10y_t - 5_{y-1} - 160 = 0$ jika syarat awal diberikan $y_o = 40$. Selidikilah jawaban anda dengan menggunakan t = 0 dan t = 1 dan bagaimana stabilitas lintasan waktunya.

a. Dengan membagi seluruhnya dengan 10, maka persamaan tersebut menjadi $y_1 = 1/2y_{t-1} + 16$ penyelesaiannya:

$$y_t = [40 - \frac{16}{1-\frac{1}{2}}]\,\frac{1}{2} + \frac{16}{1-\frac{1}{2}} = 8\,(\frac{1}{2})^t + 32$$

b. Pada t = 0, $y = 8(1/2)^0 + 32 = 40$

Pada t = 1, $y_1 = 8(1/2)^0 + 32 = 36$

Dengan mensubstitusikan $y_1 = 36$ untuk y_t dan $y_o = 40$ untuk y_{t-1} pada persamaan asal akan terlihat bahwa:

$36 = \frac{1}{2}(40) + 16$ cocok

c. Karena ß = 1/2 > 0 dan $|\beta| < 1$, maka lintasan waktu tidak berosilasi dan menyatu (konvergen).

Contoh 5. Selesaikan persamaan diferensi yang dicerminkan oleh persamaan $y_1 = 2y_{-1} + 4$. Selidikilah jawaban anda dengan menggunakan t = 0 dan t = 1 dan bagaimana stabilitas lintasan waktunya.

a. Dengan menggunakan rumus (14-6) diperoleh:

$$y_t = A\beta^1 = \frac{\alpha}{1-\beta} = A(2)^2 - 4$$

b. Pada t = 0, $y_0 = A(2)^o - 4 = A - 4$

Pada t = 1, $y_1 = A(2)^1 - 4 = 2A - 4$

Dengan mensubstitusikan $y_1 = (2A - 4)$ untuk y_t dan $y_o = (A - 4)$ untuk y_{t-1} pada persamaan asal akan terlihat bahwa:

$(2A - 4) = 2(A - 4) + 4 = 2A - 8 + 4 = 2A - 4$ cocok

c. Karena $\beta = 2 > 0$ dan $|\beta| > 1$, maka lintasan waktu tidak bersosialisasi dan meledak (divergen).

14.4 TEOREMA COBWEB

Aplikasi persamaan diferensi banyak diterapkan dalam model keseimbangan pasar. Salah satunya adalah pembahasan yang menerangkan siklus harga dan jumlah produksi yang naik turun dalam jangka waktu tertentu. Teori ini sering disebut Teori Cobweb (teori sarang laba-laba). Perilaku ini sangat menarik berkaitan dengan stabilitasnya. Model matematik untuk menjelaskan teori ini adalah sebagai berikut:

Fungsi permintaan: $Q_d = A - \alpha P_1$ $(A, \alpha > 0)$

Fungsi penawaran: $Q_x = B + \beta P_{t-1}$ $(B, \beta > 0)$

Dengan menyetarakan $Q_\beta = Q_x$ (syarat keseimbangan pasar):

$A - \alpha P = B + \beta P_{t-1}$

$\alpha P_t = -\beta P_{1-2} + (A - B)$

$$P_t = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) P_{t-1} = \frac{A - B}{\alpha}$$

Dengan menggunakan penyelesaian seperti rumus 14-4 dan mensubstitusikan parameter parameter yang ada maka diperoleh:

$$P_t = \left[P_o - \frac{[(A - B)]}{1 - (-\beta/\alpha)}\right] (-\beta/\alpha)^t = \frac{(A - B)/\alpha}{1 - (-\beta/\alpha)}$$

Dengan mengatur kembali suku-sukunya maka pemecahan persamaan di atas akan memberikan parameter P_1 sehubungan dengan P_0 berupa harga inisial yaitu:

$$P_t = \left[P_o - \frac{(A - B)}{(\alpha + \beta)}\right] (-\beta/\alpha)^t = \frac{(A - B)}{(\alpha + \beta)} \qquad (14 - 9)$$

Apabila model tersebut berada dalam keseimbangan yaitu $P_1 = P_{t-1}$, maka dengan mensubstitusikan nilai P_e pada P_t dan P_{t-1}, diperoleh:

$$A - \alpha P_e = B + \beta P_e$$

$$P_e(\alpha + \beta) = A - B$$

$$P_e = \frac{A - B}{\alpha + \beta}$$

14.4.1 Osilasi Stabil

Seperti pada Gambar 14-2, titik keseimbangan terjadi pada (40 unit, 40 rupiah). karena suatu sebab jumlah yang ditawarkan terus menjadi 30 unit dan mendorong harga naik menjadi 50 rupiah. Pada harga ini produksi akan bertambah terus sampai 50 unit dan menyebabkan jatuhnya harga menjadi 30 rupiah. Harga jatuh itu mendorong pengurangan produksi menjadi 30 unit dan seterusnya.

Penjelasan secara matematik yaitu apabila $0 = \beta$ diperoleh,

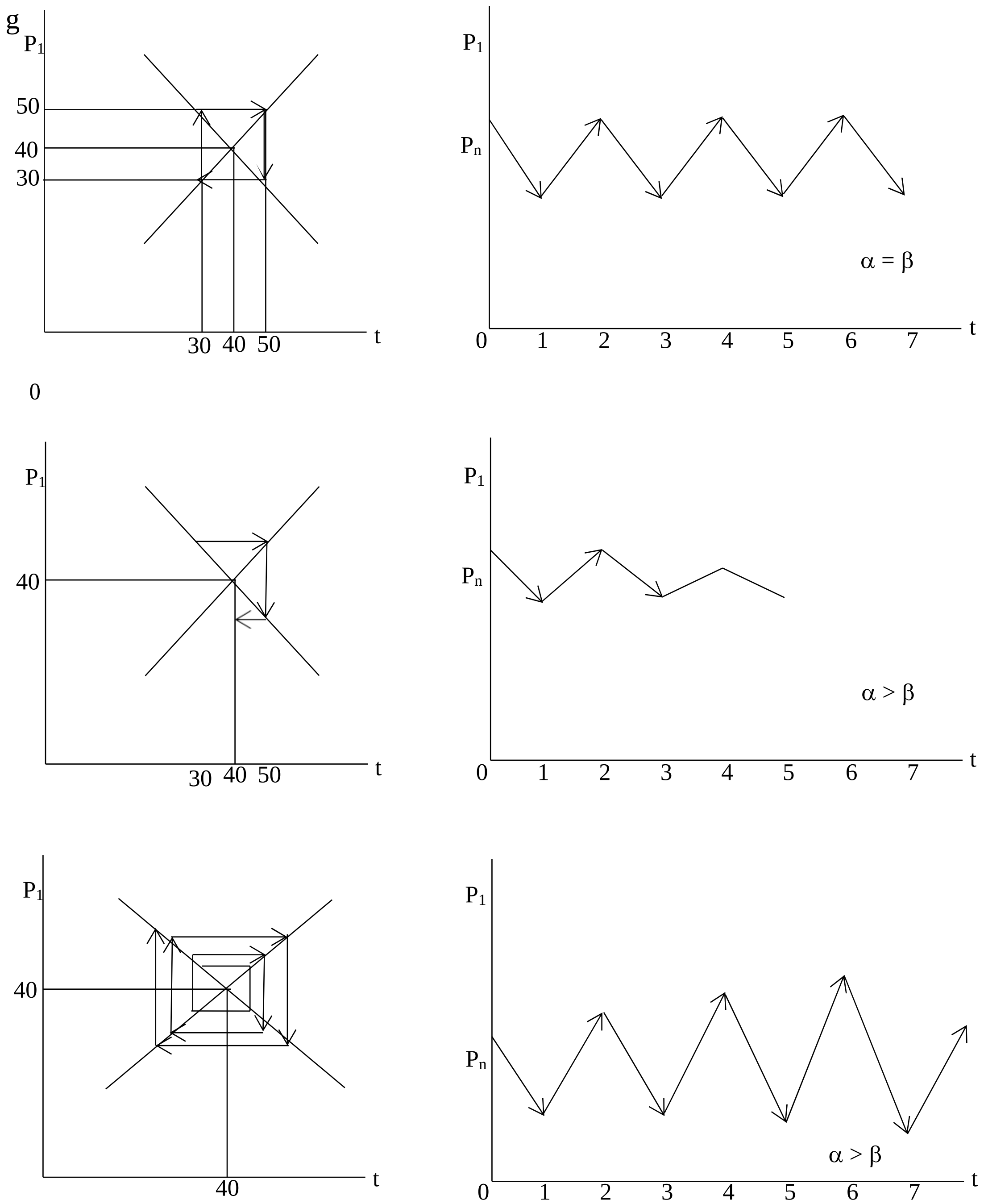
$$P_t = \left[P_o - \frac{(A - B)}{(\alpha + \beta)}\right] (-1)^t = \frac{(A - B)}{(\alpha - \beta)}$$

Pada t = 0 atau setiap bilangan genap, maka:

$$P_t = \left[P_o - \frac{(A - B)}{(\alpha + \beta)}\right] + \frac{(A - B)}{(\alpha - \beta)} = P_o \qquad 14 - 11$$

Pada t = bilangan ganjil, maka

$$P_t = \left[P_o - \frac{(A - B)}{(\alpha + \beta)}\right] + \frac{(A - B)}{(\alpha - \beta)} = P_o + \frac{2(A - B)}{(\alpha + \beta)} \qquad 14 - 12$$



Gambar 14-2 Lintasan waktu dari Model Sarang Laba-laba.

Dengan demikian harga akan bergerak antara kedua nilai harga dan jumlah-jumlah barang bergerak antara kedua nilai yang dicapai melalui substitusi harga-harga pada fungsi permintaan dan penawarannya.

14.4.2 Osilasi Menyatu

Osilasi menyatu (convergen) terjadi jika koefisien elastisitas permintaan lebih besar dari koefisien elastisitas penawarannya. Pada osilasi ini, titik keseimbangan tetap yaitu (40,40). Namun setelah periode harga naik menjadi 50 rupiah, mendorong jumlah produksi diperbesar tetapi tidak sebesar pada osilasi I melainkan hanya sebesar 45 unit. Ini mengakibatkan harga turun hanya 35 rupiah. Penurunan harga ini menyebabkan produsen memperkecil produksinya menjadi 37,5 unit dan seterusnya.

Penjelasan matematiknya yaitu apabila a > B, maka parameter (-β/α) akan mendekati nol untuk waktu t yang tak terhingga, sehingga lintasan waktu keseimbangannya adalah,

$$P_t = \frac{(A - B)}{(\alpha + \beta)} = P_e \qquad 14 - 13$$

Nilai P_t yang dicapai akan sama dengan harga perpotongan fungsi-fungsi permintaan dan penawaran. Dengan demikian P_t akan mendekati harga keseimbangan stabilitas P_t apabila t diperbesar. Setelah harga tersebut dicapai, maka variasi pada harga akan berhenti.

14.4.3 Osilasi Meledak

Osilasi ini terjadi apabila angka elastisitas permintaan lebih kecil dari angka elastisitas penawaran. Osilasi ini merupakan kebalikan dari osilasi II karena kurva penawarannya sangat elastis sekali sehingga pertambahan produksi sebagai reaksi atas kenaikan harga relatif besar dan ini menyebabkan osilasi menjurus ke arah eksplosif.

Apabila a < ß, untuk waktu t yang tak terhingga maka $(-3/\alpha)^1$ akan menjadi tak terhingga pada saat t bertambah tanpa limit. Setiap nilai baru, harga dan kuantitas barang akan semakin jauh dari titik keseimbangan dibandingkan dengan dengan posisi awal.

Contoh 6. Permintaan suatu komoditas pertanian dalam suatu periode waktu dicerminkan oleh persamaan $Q_d = 200 - 2P_t$ dan fungsi penawaran adalah $Q_s = 50 + 3P_{i-1}$. (a) Tentukan harga pasar P_t dalam suatu periode waktu, (b) harga keseimbangan P_e dan (c) Stabilitas lintasan waktunya ($P_0 = 70$).

a. Syarat keseimbangan pasar $Q_d = Q_s$

$200 – 2P_t = 50 + 3P_{i-1}$

$– 2P_t = (50 – 200) + 3P_{i-1}$

$P_t = 75 – 1,5P_{i-1}$

A

Penyelesaian persamaan diferensi dapat dipecahkan dengan menggunakan rumus 15-9 diperoleh:

$$P_t = [P_o = \frac{(A-B)}{(\alpha+\beta)}] (-\beta/\alpha)^t + \frac{(A-B)}{(\alpha+\beta)} = [70 - \frac{200-50}{(2+3)}] (-3/2)^t + \frac{200-50}{(2+3)}$$

$$= [70 = \frac{150}{1-(-1,5)}] (-1,5)^t + \frac{150}{5} = 40(-1,5)^t + 30$$

atau dengan menggunakan (rumus 15-4):

$$P_t = [70 = \frac{75}{1-(-1,5)}] (-1,5)^t + \frac{75}{1-(-1,5)} = 40(-1,5)^t + 30 \text{ cocok!}$$

b. Jika pasar berada dalam keseimbangan $P_t = P_{t-1}$, dengan mensubstitusikan P_e untuk $P_t = P_{t-1}$ pada rumus 15-10.

$200 – 2P_e = 50 + 3P_e$

$$P_t = \frac{200-50}{(2+3)} = \frac{150}{5} = 30$$

c. Karena (-B/A) = – 1,5 dan $|(-B/A)| > 1$, maka lintasan waktu berosilasi dan meledak (divergen).

Contoh 7. Kerjakan seperti Contoh 6, apabila diketahui $Q_d = 75 – 3P_t$ dan $Q_s = 30 + 1,5P_{t-1}$ untuk $P_o = 45$.

a. Syarat keseimbangan pasar $Q_d = Q_s$

$75 – 3P_t = 30 + 1,5P_{t-1}$

$– 3P_t = – 45 + 1,5P_{t-1}$

$P_t = 15 – 0,5P_{t-1}$

Penyelesaian persamaan diferensi dapat dipecahkan dengan menggunakan rumus 15-4 diperoleh:

$$P_t = [45 = \frac{15}{1-(-0,5)}] (-0,5)^t + \frac{15}{1-(-0,5)} = 35(-0,5)^t + 10$$

b. Jika pasar berada dalam keseimbangan $P_t = P_{t-1}$, dengan mensubstitusikan P_e untuk $P_t = P_{t-1}$.

$75 – 3P_e = 30 + 1,5P_e$

$$P_t = \frac{75 - 30}{(1,5 + 3)} = \frac{45}{4,5} = 10$$

c. Karena $(-\beta/\alpha) = -0,5$ dan $|(-\beta/\alpha)| > 1$, lintasan waktu akan berosilasi (konvergen) menuju titik keseimbangan yaitu $P_t = P_e = 10$.

Contoh 8. Kerjakan seperti Contoh 6, apabila diketahui $Q_d = 25 – 2P_t$ dan $Q_s = 9 + 2P_{t-1}$ untuk $P_o = 6$.

a. Syarat keseimbangan pasar $Q_d = Q_s$

$25 – 2P_t = 9 + 2P_{t-1}$

$– 2P_t = -16 + 2P_{t-1}$

$P_t = 8 – P_{t-1}$

Penyelesaian persamaan diferensi dapat dipecahkan dengan menggunakan rumus 15-4 diperoleh:

$$P_t = [6 - \frac{8}{1-(-1)}]\,(-1)^t + \frac{8}{1-(-1)} = 2(-1)^t + 4$$

b. Jika pasar berada dalam keseimbangan $P_1 = P_{t-1}$, dengan mensubstitusikan P_e untuk $P_1 = P_{t-1}$.

$25 – 2P_t = 9 + 2P_e$

$$P_t = \frac{25 - 9}{(2 + 2)} = \frac{16}{4} = 4$$

c. Pada t = genap, $P_t = 2(-1)^t + 4 = 6$

Pada t = ganjil, $P_t = 2(-1)^t + 4 = 2$

Karena $(-\beta/\alpha) = -1$, lintasan waktu akan berosilasi stabil.

14.5 PERSAMAAN DIFERENSI ORDO DUA

Penyelesaian persamaan diferensi terdiri dari dua bagian yaitu fungsi komplementer (y_c) dan fungsi partikelir atau khusus (y_p) yang dijumlahkan yaitu $y_t = y_c + Y_p$. Bentuk umum persamaan diferensi ordo dua diberikan:

$Y_t + by_{t-1} + cy_{t-2} = a$ (a, b dan c suatu konstanta) 15-14

A. Fungsi Komplementer

Penyelesaian persamaan diferensi ordo dua bentuk fungsi komplementernya adalah:

$y_e = C_1 m_1^t + C_2 m_2^t$ 14-15

Di mana akar-akar karakteristik $m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4c)}}{2}$

Jika akar-akar karakteristik berulang ($m_1 = m_2$) dengan mengasumsikan $(b^2 - 4c) = 0$ maka penyelesaian fungsi komplementernya menjadi,

$y_e = C_t t m_1^t + C_2 m_2^t$ 14-16

B. Fungsi Partikelir

Penyelesaian persamaan diferensi ordo dua untuk fungsi integral partikelir (diberikan tanpa bukti) adalah:

1. $y_p = \frac{a}{1+b+c}$ untuk $b + c \neq -1$
2. $y_p = \frac{a}{2+b}$ untuk $b + c = -1$ dan $b \neq -2$
3. $y_p = \frac{a}{2+b}$ untuk $b + c = -1$ dan $b \neq -2$

Contoh 8. Selesaikan persamaan diferensi ordo dua berikut ini dan cek penyelesaian tersebut dengan syarat misalkan t = 0, t = 1 dan t = 2.

$Y_1 - 5y_{t-1} + 6y_{1-2} = 4 \rightarrow y(0) = 22, y(1) = 33$ dan $y(2) = 63$

a. Akar-akar karakteristik fungsi komplementer (untuk a = 4, b = -5 dan c = 6):

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4c)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{((5)^2 - 4.6)}}{2} \rightarrow m_1 = 3 \text{ dan}$$

$m_2 = 2$. Jadi,

$y_c = C_1 3^t + C_2 2^t$

b. Pada a = 4, b = -5 dan c = 6 dan mensubstitusikan nilai-nilai tersebut pada rumus 15-17 butir 1, maka penyelesaian fungsi partikelnya:

$$y_p = \frac{a}{1+b+c} = \frac{4}{1-5+6} = 2$$

c. Jadi, penyelesaian persamaan diferensinya adalah:

$y = y_c + Y_p = C_1 3^t + C_2 2^1 + 2$

d. Pada t = 0, y(0) = $C_1 3^0 + C_2 2^0 + 2 = C_1 + C_2 + 2 = 11$

Pada t = 1, y(1) = $C_1 3^1 + C_2 2^1 + 2 = 3C_1 + 2C_2 + 2 = 24$

Pada t = 2, y(2) = $C_1 3^2 + C_2 2^2 + 2 = 9C_2 + 4C_3 + 2 = 58$

Penyelesaian secara simultan menghasilkan $C_1 = 4$ dan $C_2 = 5$.

Jadi,

y = Yc+Yp = 4(3)' + 5(2)' + 2

e. Dengan mengecek kembali, substitusikan y(2) pada y; y(1) pada Y_{t-1} dan y(0) pada y_{t-2} pada persamaan asal,

$y_t + 5y_{t-1} + 6y_{t-1} = 4$

58 – 5(24) + 6(11) = 4

58 – 120 + 66 = 4 cocok

Contoh 9. Selesaikan persamaan diferensi ordo dua berikut ini dan cek penyelesaian tersebut dengan syarat misalkan t = 0, t = 1 dan t = 2.

$$y_1 - 4y_{t-1} + 3y_{t-2} = 18;\ y(0) = 6,\ y(1) = 5 \text{ dan } y(2) = 20$$

a. Akar-akar karakteristik (a = 18, b = -4 dan c = 3)

$$m_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4.3)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \rightarrow m_1 = 1 \text{ dan } m_2 = 3$$

$y_c = C_1 1^t + C_2 3^t$

b. Pada a = 18, b = -4 dan c = 3, penyelesaian fungsi partikelnya:

$$y_p = \frac{at}{2+b} = \frac{18t}{2-4} = -9t$$

c. Jadi, penyelesaian persamaan diferensinya adalah:

$y = y_c + y_p = C_1 1^t + C_2 3^t - 9t$

d. Pada t = 0, y(0) = $C_t 1^0 + C_2 3^0 - 9t = C_1 + C_2 - 0 = 6$

Pada t = 1, y(1) = $C_1 1_1 + C_2 3^1 - 9t = C_1 + 3C_2 - 9 = 5$

Pada t = 2, y(2) = $C_1 1^2 + C_2 3^2 - 9t = C_1 + 9C_2 - 18 = 20$

Penyelesaian secara simultan menghasilkan $C_1 = 2$ dan $C_2 = 4$.

Jadi,

$y = y_c + y_p = 2(1)^t + 4(3)^t - 9t$

e. Dengan mengecek kembali, substitusikan y(2) pada y_t: y(1) pada y_{t-1} dan y(0) pada y_{t-2} pada persamaan asal,

$y_t - 4y_{t-1} + 3y_{t-2} = 18$

$20 - 4(5) + 3(6) \quad = 18$

$20 - 20 + 18 \quad = 18$ cocok

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Selesaikan persamaan diferensi ordo satu yang ditunjukkan oleh $y_1 = 5y_{t-1} + 12$. Jika diberikan syarat awal $y_o = 7$, selidikilah jawaban anda dengan menggunakan t = 0 dan t = 1.
2. Kerjakan kembali seperti soal-1 persamaan diferensi ordo satu $y_{t+3} = Y_{t+2} – 10$ ini. Selidiki jawaban anda dengan menggunakan misalnya pada t = 0 dan t = 1.
3. Suatu persamaan diferensi ordo satu dicerminkan oleh persamaan $y_1 = 8y_{t-1} + 8$. Dengan menggunakan periodik pada t = 0 dan t = 1 dan evaluasi stabilitas lintasan waktunya.
4. Seperti soal-3, diberikan suatu persamaan diferensi $y_t = -3y_{t-1} +9$ dan syarat awal pada $y_0 = 15$.
5. Kerjakan kembali seperti soal-3, diketahui persamaan diferensi $2y_t – y_{t-1} – 18 = 0$ dan syarat awal diberikan $y_0 = 25$.
6. Permintaan suatu komoditas pertanian dalam suatu periode waktu dicerminkan oleh persamaan $Q = 125 – 4P_1$ dan fungsi penawarannya ditunjukkan oleh persamaan $Q_s = 25 + 8P_{t-1}$.
   a. Tentukan harga pasar P_1 dalam suatu periode waktu.
   b. Harga keseimbangan P_e.
   c. Stabilitas lintasan waktunya ($P_0 = 5$).
7. Kerjakan seperti soal-6, apabila diketahui fungsi permintaan $Q_d = 25 – 6P_1$ dan fungsi penawarannya $Q_s = 5 + 3P_{t+1}$ untuk $P_0 = 30$.
8. Selesaikan persamaan diferensi ordo dua yang ditunjukkan oleh persamaan $y_t – 7y_{t-1} + 12y_{t-2} = 24$. Evaluasi penyelesaian tersebut dengan syarat misalkan t = 0, t = 1 dan t = 2. Diberikan y(0) = 12, y(1) = 33 dan y(2) = 111.
9. Seperti pada soal-8, selesaikan persamaan diferensi ordo dua yang ditunjukkan oleh $y_t - 4y_{t-1} – 3y_{t-2} + 2$. Evaluasi penyelesaian tersebut dengan syarat misalkan t = 0, t = 1 dan t = 2. Diberikan y(0) = 9, y(1) = 20 dan y(2) = 55.
10. Selesaikan beberapa persamaan diferensi ordo dua di bawah ini dengan penyelesaian tertentu (definit) yaitu dengan mengevaluasi pada t = 0, t = 1 dan t = 2 dari syarat awalnya.

BAB XV
LINEAR PROGRAMMING

Linear programming adalah suatu teknik untuk mencari solusi yang optimal dalam persoalan alokasi sumberdaya-sumberdaya yang terbatas, yang dapat dinyatakan dalam hubungan-hubungan linear. Model pendekatan ini mempunyai beberapa kelebihan diantaranya sangat memperhitungkan fenomena adanya berbagai cara untuk menghasilkan barang maupun jasa. Adanya berbagai alternatif untuk memenuhi kebutuhan dan juga adanya alternatif yang dipilih dalam suatu bagian atau sektor perekonomian.

Linear programming mulai diperkenalkan dan dipakai sekitar lima puluh tahun yang lalu. Semula teknik ini dipakai untuk merencanakan dan memecahkan masalah logistik pada Angkatan Udara Amerika Serikat. Kemudian mulai berkembang dan banyak dimanfaatkan oleh berbagai pihak. Scope pemakaiannyapun mulai bertambah luas seperti masalah-masalah produksi, scheduling, alokasi sumber-sumber, masalah transportasi dan masalah-masalah optimasi lainnya.

15.1 METODE GRAFIK

Persoalan-persoalan yang dihadapi perusahaan pada umumnya adalah bagaimana mengalokasikan secara tepat sumber-sumber (*resources*) yang dimiliki agar dapat memaksimumkan laba (*to maximize the profit*) atau meminimumkan biaya-biaya (*to minimize the loss*) atau memanfaatkan kapasitas faktor-faktor produksi yang dimiliki secara optimum.

Kegiatan pemasaran akan dibatasi oleh kapasitas pasar atau kemampuan pasar untuk menyerap barang atau jasa yang dihasilkan. Sedangkan kegiatan produksi akan dibatas oleh kapasitas bahan mentah yang tersedia, kemampuan mesin-mesin produksi ataupun jumlah tenaga kerja yang menanganinya. Oleh sebab itu segala yang dilakukan oleh perusahaan selalu dihalangi oleh faktor-faktor pembatas (*constraints*). Bagaimana memanfaatkan kapasitas faktor-faktor produksi yang tersedia agar dapat dicapai tingkat keuntungan yang maksimum atau tingkat biaya yang minimum?

Contoh 1. Sebuah pabrik rokok Gudang Djarum mengeluarkan 2 macam produk baru yaitu rokok kretek (x) dan rokok filter (y). Margin laba rokok kretek Rp 3,- dan margin rokok filter Rp 2,-. Rokok kretek memerlukan waktu 4 menit untuk pengolahan, 6 menit pelintingan dan 2 menit pengepakan. Sedangkan rokok filter membutuhkan waktu 2 menit pengolahan, 6 menit pelintingan dan 4 menit untuk pengepakan. Jika tersedia waktu 20 menit untuk pengolahan, 36 menit pelintingan dan 20 menit pengepakan, bagaimana bauran output memaksimumkan laba dalam bentuk persamaan-persamaan dan ketidaksamaannya?

1. Fungsi tujuan (objective function) dinyatakan dalam persamaan atau ketidaksamaan. Fungsi obyektif yang akan dioptimumkan menjadi:

   Maksimumkan $\pi = 3x + 2y$ ………………..

   Masalah yang dihadapi oleh pengusaha rokok adalah adanya beberapa batasan-batasan yang perlu dipertimbangkan (*constraint conditions*). Batasan ini adalah kendala bahwa x dan y harus bersifat tidak negatif (*nonnegativity constraint*) yang ditentukan setiap soal untuk menghindari nilai negatif dari penyelesaiannya.
2. Batasan kedua adalah kendala teknis yang ditentukan oleh keadaan teknologi, waktu dan tersedianya input.

   Kendala pengolahan $4x + 2y \leq 20$

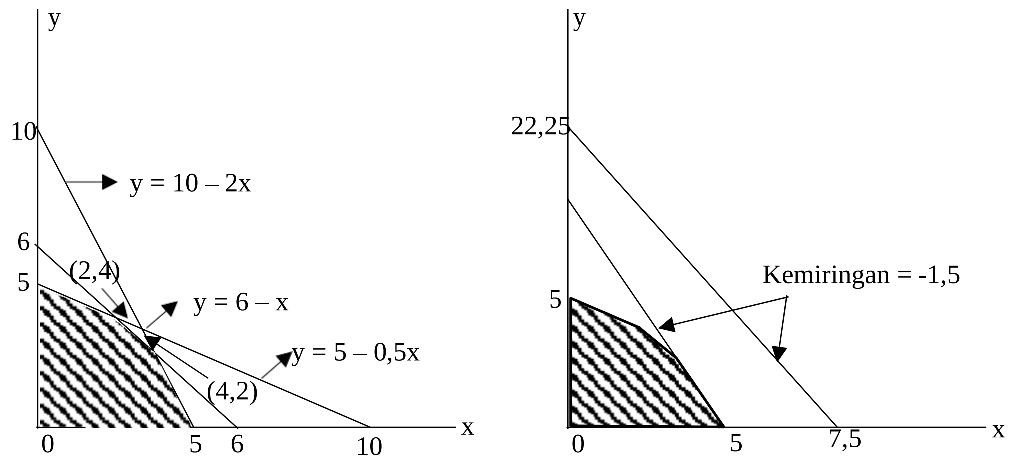
   Kendala pelintingan $6x + 6y \leq 36$

   Kendala pengepakan $2x + 4y \leq 20$
3. Perlakukan ketiga kendala ketidaksamaan tersebut sebagai persamaan, selesaikan masing-masing untuk y dalam kaitannya dengan x dan gambarkan grafiknya. Jadi,

   Kendala pengolahan $y = 10 - 2x$

   Kendala pelintingan $y = 6 - x$

   Kendala pengepakan $y = 5 - 0{,}5x$



Gambar 15-1 Metode Grafik.

Daerah yang digelapkan merupakan daerah yang memungkinkan atau disebut sebagai *solution space*. Daerah ini memuat semua titik-titik ketiga kendala ditambah kendala ketidaknegatifan.

4. Pemecahan yang optimal dapat dicari dengan cara menghubungkan masing-masing titik dalam *solution space* dengan fungsi obyektif.

   $y = 0{,}5\pi - 1{,}5x$ ……………

   Jika ada gambarkan grafik fungsi obyektif sebagai suatu seri garis isoprofit.

   Garis isoprofit tersebut mempunyai kemiringan menggambarkan suatu seri garis isoprofit (garis putus-putus) yang bersinggungan dengan *solution space* yaitu pada titik A(4,2). Jadi produksi dengan laba maksimum pada komposisi: rokok kretek x = 4 buah dan rokok filter y: 2 buah. Dengan mensubstitusikan fungsi laba diperoleh $\pi = 3(4) + 2(2) = 16$.

Contoh 2. Seorang petani ingin mengkombinasi pupuk yang akan memberikan minimum 36 unit fosfat, 20 unit nitrat dan 20 unit kalium. Merk X dengan harga Rp. 500,- mempunyai komposisi 5 unit fosfat, 4 unit nitrat dan 2 unit kalium. Merk Y dengan harga Rp 200,- mempunyai komposisi 5 unit fosfat, 2 unit nitrat dan 4 unit kalium. Nyatakan kombinasi yang paling murah dalam bentuk persamaan-persamaan dan ketidaksamaan untuk memenuhi spesifikasi yang diinginkan petani tersebut.

1. Fungsi obyektif yang akan diminimumkan:

   Minimumkan biaya: $C = 500x + 200y$.......
2. Batasan kendala teknis:

   Kendala fosfat $5x + 5y \geq 40$

   Kendala nitrat $4x + 2y \geq 20$

   Kendala kalium $2x + 4y \geq 20$

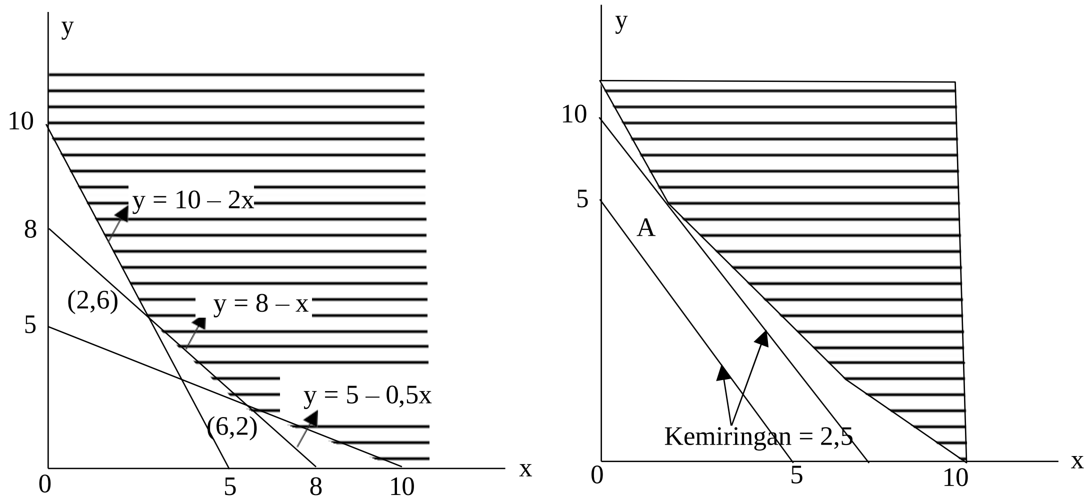
   Kendala ketidaknegatifan, $y > 0$ ....
3. Perlakukan ketiga kendala ketidaksamaan tersebut sebagai persamaan, selesaikan masing-masing untuk y dalam kaitannya dengan x. Jadi,

   Kendala fosfat $y = 8 - x$

   Kendala nitrat $y = 10 - 2x$

   Kendala kalium $y = 5 - 0{,}5x$

Garis isocost tersebut mempunyai kemiringan = -2,5. Dengan menggambarkan suatu seri garis isocost (garis putus-putus) yang bersinggungan dengan solution space yaitu pada titik (2,6). Jadi bauran dengan biaya minimum pada komposisi: merk X dan merk Y = 6 unit. Jadi, biaya minimum C = 500(2) +200(6) = 22.000 rupiah.



Gambar 15-2 Metode Grafik.

15.2 VARIABEL SLACK DAN VARIABEL SURPLUS

Dua buah soal terdahulu telah menyajikan masalah maksimisasi dan minimisasi yang masing-masing mengandung sistem ketidaksamaan linear. Untuk menyelesaikan ketidaksamaan linear menjadi bentuk persamaan linear seperti contoh soal di atas perlu diperkenalkan suatu variabel penambah (*slack variable*) atau variabel pengurang (*surplus variable*) yang terpisah (s_i) ke dalam masing-masing ketidaksamaan (kendala ke-i) dalam sistem tersebut. Apabila bernilai positif ($S_1 \geq 0$) maka disebut *slack variable*; sedangkan bernilai negatif ($-s_i \leq 0$) disebut *surplus variable*.

Kita lihat ketidaksamaan dibawah ini:

$X_1 + X_2 + X_3 \leq b_1$ 15-1

Kita masukkan *slack variable* (s) dengan maksud bahwa dengan tambahan nilai (s_1) akan mengakibatkan nilai menjadi b_1:

$X_1 + X_2 + X_3 + S_1 = b_1$ 15-2

Seterusnya sehingga batasan-batasan menjadi:

$a_{11}x_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + S_1 = b_1$

$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + S_2 = b_2$

…………………………………

$a_{n1}X_1 + a_2X_2 + a_{n3}X_3 + S_n = b_n$ 15-3

Contoh 3: Ubahlah kendala-kendala teknis ketidaksamaan (contoh-1) menjadi persamaan dengan menambahkan variabel slack pada masing-masing kendala:

Kendala pengolahan $4x + 2y \leq 20 \rightarrow 4x + 2y + S_1 = 20$

Kendala pelintingan $6x + 6y \leq 36 \rightarrow 6x + 6y + S_2 = 36$

Kendala pengepakan $2x + 4y \leq 20 \rightarrow 2x + 4y + S_3 = 20$

Dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 36 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Contoh 4. Ubahlah kendala-kendala teknis ketidaksamaan (contoh-2) menjadi persamaan dengan menambahkan variabel surplus masing-masing kendala:

Kendala fosfat $5x + 5y \geq 40 \rightarrow 5x + 5y - s_1 = 40$

Kendala nitrat $4x + 2y \geq 20 \rightarrow 4x + 2y - s_2 = 20$

Kendala kalium $2x + 4y \geq 20 \rightarrow 2x + 4y - s_3 = 20$

Dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

15.3 DALIL DASAR

Untuk suatu persoalan dengan beberapa persamaan m dengan variabel n, dimana n > m, akan terdapat sejumlah penyelesaian yang tak terhingga. Akan tetapi menurut dalil dasar terdapat penyelesaian paling tidak (n-m) variabel akan sama dengan nol merupakan titik ekstrim. Suatu penyelesaian dengan menetapkan (n-m) variabel sama dengan nol dan menyelesaikan m persamaan untuk variabel yang tersisa, suatu titik ekstrim, atau penyelesaian dasar dapat diperoleh. Secara matematis jumlah penyelesaian dasar dapat dituliskan sebagai:

$$p = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

dimana: n! = 1.2.3.....(n-3).(n-2).(n-1).n (n faktorial) 15-4

Contoh 5. Maksimumkan = 5x + 2y dengan kendala sebagai berikut:

$4x + 2y \leq 20$

$6x + 6y \leq 36$

$2x + 4y \leq 20$ .... 1)

Dengan menambah slack variable s_1, s_2 dan s_3 menjadi:

$4x + 2y + s_1 = 20$

$6x + 6y + s_2 = 36$

$2x + 4y + s_3 = 20$................ 2)

Terdapat 3 macam persamaan dan 5 variabel. Dengan mensubstitusi parameter-parameter yang ada pada rumus 15-4, maka terdapat:

$$p = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1(2.1)} = 10 \text{ penyelesaian dasar}$$

1. Pada x = y = 0: $4(0) + 2(0) + s_1 = 20 \rightarrow s_1 = 20$
   $6(0) + 6(0) + s_2 = 36 \rightarrow s_2 = 36$
   $2(0)+4(0) + S3 = 20 \rightarrow s_3 = 20$

   Jadi, $\pi = 3x + 2y = 5(0) + 3(0) = 0$
2. Pada $x = s_1 = 0$; $4(0) + 2y + 0 = 20 \rightarrow y = 10$
   $6(0) + 6y + s_2 = 36 \rightarrow s_2 = -24$ (negatif)
   $2(0) + 4y + s_3 = 20 \rightarrow s_3 = -20$ (negatif)

   Dengan s_2 dan s_3 negatif melanggar asas ketidaknegatifan maka fungsi obyektif tidak perlu dihitung.
3. Pada $x = s_2 = 0$: $4(0) + 2y + s_1 = 20 \rightarrow y = 6$
   $6(0) + 6y + 0 = 36 \rightarrow s_1 = 8$
   $2(0) + 4y + s_3 = 20 \rightarrow s_3 = -4$ (negatif)
4. Pada $x = s_3 = 0$: $4(0) + 2y + s_1 = 20 \rightarrow y = 5$
   $6(0) + 6y + s_2 = 36 \rightarrow s_1 = 10$

$2(0) + 4y + 0 = 20 \rightarrow s_2 = -24$ (negatif)

5. Pada y $s_1 = 0$: $4x + 2(0) + 0 = 20 \rightarrow x = 5$

   $6x + 6(0) + s_2 = 36 \rightarrow s_2 = 6$

   $2x + 4(0) + s_3 = 20 \rightarrow s_3 = 10$

   Jadi, $\pi = 3x + 2y = 3(5) + 2(0) = 15$

6. Pada $y = s_2 = 0$: $4x + 2(0) + s_1 = 20 \rightarrow x = 6$

   $6x + 6(0) + 0 = 36 \rightarrow s_1 = -4$ (negatif)

   $2x + 4(0) + s_3 = 20 \rightarrow s_3 = 8$

7. Pada $y = s_3 = 0$: $4x + 2(0) + s_1 = 20 \rightarrow x = 10$

   $6x + 6(0) + s_2 = 36 \rightarrow s_1 = -20$ (negatif)

   $2x + 4(0) + 0 = 20 \rightarrow s_2 = -24$ (negatif)

8. Pada $s_1 = s_3 = 0$: $4x + 2y + 0 = 20 \rightarrow x = 4$

   $6x + 6y + 0 = 36 \rightarrow y = 2$

   $2x + 4y + s_3 = 20 \rightarrow s_3 = 4$

   Jadi, $\pi = 3x + 2y = 3(4) + 2(2) = 16$

9. Pada $s_1 = s_3 = 0$: $4x + 2y + 0 = 20 \rightarrow x = 3{,}33$

   $6x + 6y + s_2 = 36 \rightarrow y = 3{,}33$

   $2x + 4y + 0 = 20 \rightarrow s_2 = -4$ (negatif)

10. Pada $s_2 = s_3 = 0$: $4x + 2y + s_1 = 20 \rightarrow x = 2$

    $6x + 6y + 0 = 36 \rightarrow y = 4$

    $2x + 4y + 0 = 20 \rightarrow s_1 = 4$

    Jadi, $\pi = 3x + 2y = 3(2) + 2(4) = 14$

Penyelesaian yang optimal dari 10 macam penyelesaian dasar diatas terdapat pada titik (4,2) dengan laba π maksimum sebesar 16.

15.4 ALGORITMA SIMPLEKS: MAKSIMISASI

Untuk lebih memahami pemecahan masalah optimisasi, maka langkah dasar teknik algoritma simpleks ini dapat dirinci sebagai berikut:

1. Menentukan fungsi obyektif terlebih dahulu.
2. Mengidentifikasi batasan-batasannya yang berlaku dalam ketidaksamaan.

3. Mengubah bentuk ketidaksamaan menjadi persamaan dengan menambah variabel slack atau surplusnya.
4. Membuat tabel matriks.

Tabel Matriks Algoritma Simpleks.

Prog	Laba/ Unit	C_1	a_1	….	a_n	0	…..	0	R = b/a_{1n}
		Quant	X_1	….	X_n	s_1	…..	s_n	
s_1	A_1	b_n	a_{11}	…..	a_{1n}	…..	…..	…..	…..
-	-	-	-	…..	-	…..	…..	…..	…..
-	-	-	-	…..	-	…..	…..	…..	…..
s_n	A_n	b_n	a_{n1}	…..	a_{nn}	…..	…..	…..	…..
π = ….		Z_1	…..	…..	…..	…..	…..	…..	
		C_1-Z_1	…..	…..	…..	…..	…..	…..	

Kolom Program : Berisi rencana yang akan kita produksi.

Kolom Profit Unit : Berisi laba per unit setiap produk yang dihasilkan. Karena kita menghasilkan produk

Kolom Quantity b_j : Berisi batasan maksimum/minimum.

Baris C_j : Berisikan kontribusi laba per unit setiap produk yang dihasilan.

Baris Z_j : Berisi hasil perkalian antara profit per unit dengan kuantitas.

Baris $C_j – Z_j$: Baris hasil pengurangan baris C, dengan baris Z

Kolom π : Nilai fungsi obyektif yang merupakan perkalian antara kuantitas dan profit per unit.

5. Menentukan kolom kunci (*key column*) yaitu mencari angka pada baris $C_j – Z_j$ pilih angka yang mutlaknya besar.
6. Menentukan baris kunci (*key row*) yaitu mencari angka yang terkecil dari perbandingan kuantitas dan kolom kunci perbandingan angka terletak pada kolom R.
7. Menentukan nomor kunci (*key number*) yaitu angka dimana terletak perpotongan antara baris kunci dan kolom kunci.
8. Mengadakan transformasi baris kunci yaitu membagi semua angka-angka pada baris kunci dengan nomor kunci.

9. Mengadakan tranformasi baris-baris lain (*non keyrow*), yaitu mengurangkan angka-angka pada baris lama dengan hasil kali antara angka-angka pada baris kunci dengan *fixed ratio*.

$$\text{Fixed Ratio} = \frac{\text{angka pada kolom}}{\text{nomor kunci}} \qquad 15-5$$

Contoh 6. Algoritma simpleks digunakan untuk memaksimumkan laba perusahaan rokok PT. Gudang Djarum dengan fungsi laba diberikan:

Maksimumkan laba $\pi = 3x + 2y$

dengan kendala: $4x + 2y \leq 20$

$6x + 6y \leq 36$

$2x + 4y \leq 20$

Kendala ketidaknegatifan: $x,y \geq 0$

Dengan menambahkan slack variable s_1, s_2 dan s_3 pada ketidaksamaan-ketidaksamaan di atas maka ketidaksamaan tersebut menjadi:

$4x + 2y + s_1 = 20$

$6x + 6y + s_2 = 36$

$2x + 4y + s_3 = 20$

Fase I:

Prog	Laba/ Unik	C_1	3	2	0	0	0	R
		Quant	x	y	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	20	4	2	1	0	0	20/4
s_2	0	36	6	6	0	1	0	36/6
s_3	0	20	2	4	0	0	1	2-/2
$\pi = 0$		z_1	0	0	0	0	0	
		C_1-Z_1	3	2	0	0	0	

←baris kunci

← Kolom kunci

Penyelesaian Fase I diperoleh (x = 0 dan y = 0) sehingga $s_1 = 20$, $s_2 = 36$ dan $s_3 = 20$. Fungsi obyektif $\pi = 3(0) + 2(0) = 0$. Penyelesaian selanjutnya:

a. Baris-1 (s_j digantikan dengan x):

20 : 4 = 5

4 : 4 = 1

2 : 4 = 0,5

1 : 4 = 0,25

0 : 4 = 0

0 : 4 = 0

Baris – 2 fixed ratio = 6/4 = 1,5

36 – (20 x 1,5) = 6

6 – (4 x 1,5) = 0

6 – (2 x 1,5) = 3

0 – (1 x 1,5) = – 1,5

1 – (0 x 1,5) = 1

0 – (0 x 1,5) = 0

Baris – 3 fixed ratio = 2/4 = 0,5

20 – (20 x 0,5) = 10

2 – (4 x 0,5) = 0

4 – (2 x 0,5) = 3

0 – (1 x 0,5) = – 0,5

0 – (0 x 0,5) = 0

1 – (0 x 0,5) = 1

Fase II:

Prog	Laba/ Unik	C_1	3	2	0	0	0	R	
		Quant	x	y	s_1	s_2	s_3		
s_1	3	5	1	0,5	0,25	0	0	6	
s_2	0	6	0	3	-1,5	1	0	2	←baris kunci
s_3	0	10	0	3	-0,5	0	1	2,86	
π = 15		z_1	3	1,5	0,75	0	0		
		C_1-Z_1	0	0,5	-0,75	0	0		
				Kolom kunci					

Penyelesaian Fase II diperoleh (x = 5 dan y = 0) sehingga s_1 = 0, s_2 = 6 dan s_3 = 10. Fungsi obyektif π = 3(5) + 2(0) = 15. Selanjutnya:

b. Baris-1 (s_j digantikan dengan x):

6 : 3 = 2

0 : 3 = 0

3 : 3 = 1

-1,5 : 3 = -0,5

1 : 3 = 0,33

0 : 3 = 0

Baris-1 fixed ratio = 0,5/3 = 0,167

5 - (6 x 0,167) = 4

1 - (0 x 0,167) = 1

0,5 - (3 x 0,167) = 0

0,25 – (-1,5 x 0,167) = 0,5

Baris-3 fixed ratio = 3/3 = 1

10 - (6 x 1) = 4

0 - (0 x 1) = 0

3 - (3 x 1) = 0

-0,5 – (-1,5 x 1) = 0,5

0 - (1 x 0,167) = -0,167 0 - (1 x 1) = -1

0 - (0 x 0,167) = 0 1 - (0 x 1) = 1

Fase III:

Prog	Laba/ Unik	C_1	3	2	0	0	0	R
		Quant	x	y	s_1	s_2	s_3	
s_1	3	4	1	0	0,5	-0,167	0	
s_2	2	2	0	1	-0,5	0,33	0	
s_3	0	4	0	0	0,5	-1	1	
π = 16		z_1	3	2	0,5	0,165	0	
		C_1-Z_1	0	0	-0,5	-0,165	0	

Karena tidak terdapat indikator positif pada baris terakhir maka penyelesaian sudah mencapai optimal. Diperoleh x = 4 dan y = 2 serta (s_1 = s_2 = 0 dan s_3 = 4). Dengan s_1 = s_2 = 0 tidak terdapat variabel slack dalam kendala-1 dan kendala-2 dan kedua input semuanya habis. Laba akan naik sebesar (0,5) untuk perubahan satu unit dalam kenaikan konstanta kendala-1 dan sebesar (0,165) untuk perubahan satu unit dalam kenaikan konstanta kendala-2. Pada s_3 = 4, yaitu 4 unit dari kendala-3 tidak terpadu. Jadi, laba maksimum = 3(4) + 2(2) = 16.

Contoh 7. Seorang pengusaha memproduksi 3 jenis boneka anak-anak yaitu boneka A, B dan C yang diproses melalui 3 buah mesin (I, II dan III). Kapasitas maksimum masing-masing mesin adalah mesin I 1.300 menit, mesin II 2.300 menit dan mesin III 1.700 menit. Waktu yang dibutuhkan untuk memproduksi 1 unit boneka adalah:

Boneka A: diproduksi selama 2 menit di mesin I, 7 menit di mesin II dan 3 menit di mesin III.

Boneka B: diproduksi selama 2 menit di mesin I, 4 menit di mesin dan 4 menit di mesin III.

Boneka C: diproduksi selama 4 menit di mesin I, 5 menit di mesin II dan 4 menit di mesin III. Jika masing-masing boneka menghasilkan laba per unit: untuk boneka A = 40 rupiah, B = 45 rupiah dan C = 55 rupiah, dapatkan kombinasi yang optimum dari 3 macam boneka agar diperoleh laba yang maksimum?

a. Maksimisasi $\pi = 40a + 45b + 55c$

Kendala: $2a + 2b + 4c \leq 1.300 \rightarrow 2a + 2b + 4c + s_1 = 1.300$

$7a + 4b + 5c \leq 2.300 \rightarrow 7a + 4b + 5c + s_2 = 2.300$

$$3a + 4b + 4c \leq 1.700 \rightarrow 3a + 4b + 4c + s_3 = 1.700$$

Fase I

Prog	Laba/ Unik	C_1	40	45	55	0	0	0	R
		Quant	A	B	C	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1300	2	2	4	1	0	0	325
s_2	0	2300	7	4	5	0	1	0	460
s_3	0	1700	3	4	4	0	0	1	425
$\pi = 15$		z_1	0	0	0	0	0	0	
		C_1-Z_1	40	45	55	0	0	0	

←baris kunci

←Kolom kunci

Penyelesaian Fase I diperoleh a = 0, b = 0 dan c = 0 sehingga s_1 = 1.300, s_2 = 2.300 dan s_3 = 1.700. Fungsi obyektif π = 40(0) + 45(0) + 55(0) = 0. Penyelesaian selanjutnya:

b. Baris-1 (s_1 digantikan dengan C):

1.300: 4 = 325

2 : 4 = 0,5

2 : 4 = 0,5

4 : 4 = 1

1 : 4 = 0,25

0 : 4 = 0

0 : 4 = 0

Baris-2 fixed ratio = 5/4 = 1,25

2300 – (1300x 1,25) = 675

7 – (2 x 1,25) = 4,5

4 – (2 x 1,25) = 1,5

5 – (4 x 1,25) = 0

0 – (1 x 1,25) = -1,25

1 – (0 x 1,25) = 1

0 – (0 x 1,25) = 0

Baris-3 friend ratio = 4/4 = 1

1700 – (1300x 1) = 400

3 – (2 x 1) = 1

4 – (2 x 1) = 2

4 – (4 x 1) = 0

0 – (1 x 1) = -1

0 – (0 x 1) = 0

1 – (0 x 1) = 1

Fase II

Prog	Laba/ Unik	C_1	40	45	55	0	0	0	R
		Quant	A	B	C	s_1	s_2	s_3	
s_1	55	325	0,5	0,5	1	0,25	0	0	650
s_2	0	675	4,5	1,5	0	-1,25	1	0	450
s_3	0	400	1	0	0	-1	0	1	200 ← baris kunci
π = 17,875		z_1	27,5	27,5	55	13,5	0	0	
		C_1-Z_1	12,5	17,5	0	-13,75	0	0	
				←Kolom kunci					

Penyelesaian Fase II diperoleh a = 0, b = 0 dan c = 325 sehingga s_1 = 0, s_2 = 675 dan s_3 = 400. Fungsi obyektif π = 40(0) + 45(0) + 55(325) = 17.875. Penyelesaian selanjutnya:

c. Baris-3 (s) digantikan dengan B).

400	: 2 = 200
1	: 2 = 0,5
2	: 2 = 1
0	: 2 = 0
-1	: 2 = -0,5
0	: 2 = 0
1	: 2 = 0,5

Baris-1 fixed ratio = 0,5/2 = 0,25	Baris-2 fixed ratio = 8/16 = 0,5
325 – (400 x 0,25) = 225	675 – (400 x 0,75) = 3,75
0,5 – (1 x 0,25) = 0,25	4,5 – (1 x 0,75) = 3,75
0,5 – (2 x 0,25) = 0	1,5 – (2 x 0,75) = 0
1 – (0 x 0,25) = 1	0 – (0 x 0,75) = 0
0,25 – (-1 x 0,25) = 0,5	-1,25 – (-1 x 0,75) = -0,05
0 – (0 x 0,25) = 0	1 – (0 x 0,75) = 1
0 – (1 x 0,25) = -0,25	0 – (1 x 0,75) = -0,75

Fase III

Prog	Laba/ Unik	C_1	40	45	55	0	0	0	R	
		Quant	A	B	C	s_1	s_2	s_3		
C	55	225	0,2	0	1	0,5	0	-0,25	900	
s_2	0	375	3,7	0	0	-0,5	1	-0,75	100	baris kunci
8	45	200	0,5	1	0	-0,5	0	0,5	400 ←	
π = 23,375		z_1	36,2	45	55	5	0	8,75		
		C_1-Z_1	3,7 ←Kolom kunci	0	0	-5	0	-8,75		

Penyelesaian Fase III diperoleh a = 0, b = 200 dan c = 225 sehingga s_1 = 0, s_2 = 375 dan s_3 = 0. Fungsi obyektif π = 40(0) + 45(200) + 55(225) = 21.375. Penyelesaian selanjutnya:

d. Baris-2 (s_2) digantikan dengan A).

375 : 3,75 = 100

375 : 3,75 = 1

0 : 3,75 = 0

0 : 3,75 = 0

-0,5 : 3,75 = -0,1333

1 : 3,75 = 0,2667

-0,75 : 3,75 = 0,2

Baris-1 fixed ratio = 0,0667	Baris-2 fixed ratio = 0,1333
322 – (375 x 0,0667) = 200	200 – (375 x 0,1333) = 150
0,25 – (375 x 0,0667) = 0	0,5 – (375 x 0,1333) = 0
0 – (0 x 0,0667) = 0	1 – (0 x 0,1333) = 1
0,5 – (-0,5 x 0,0667) = 0,5333	-5 – (-0,5 x 0,1333) = -0,433
0 – (1 x 0,0667) = -0,067	0 – (1 x 0,1333) = -0,133
-25 – (-0,75 x 0,0667) = -0,2	0 – (1 x 0,1333) = -0,6

Fase IV

Prog	Laba/ Unik	C_1	40	45	55	0	0	0	R
		Quant	A	B	C	s_1	s_2	s_3	
C	55	200	0	0	1	0,533	-0,067	-0,2	
A	40	100	1	0	0	-0,133	0,267	-0,2	
B	45	150	0	1	0	-0,433	-0,133	0,6	
π = 21,750		z_1	40	45	55	4,5	1	8	
		C_1-Z_1	0	0	0	-4,5	-1	-8	

Karena tidak terdapat indikator positif pada baris terakhir maka penyelesaian sudah mencapai optimal. Diperoleh A = 100 dan B = 150 dan C = 200 serta ($s_1 = s_2 = s_3 = 0$). Dengan $s_1 = s_2 = s_3 = 0$). Dengan $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ tidak terdapat variabel slack pada semua kendala dan ketiga input semuanya habis. Jadi,

produk A = 100 unit

produk B = 150 unit

produk C = 200 unit

Laba perusahaan $\pi = 40(100) + 45(150) + 55(200) = 21.750$.

15.5 ALGORITMA SIMPLEKS: MINIMISASI

Algoritma simpleks untuk kasus minimisasi suatu fungsi yang akan dioptimalkan dari bentuk ketidaksamaan perlu diubah menjadi bentuk persamaan dengan menambahkan variabel surplus $s_i \leq 0$. Namun demikian penyelesaian algoritma simpleks ini cukup unik karena masih harus ditambahkan dengan variabel dummy dengan maksud khusus untuk menyelesaikan suatu penyelesaian dasar yang mungkin.

Contoh 8. Seorang ahli pangan ingin mencampur pakan yang akan memberikan minimum 31 unit karbohidrat, 15 unit protein dan 33 unit lemak untuk kebutuhan pakan sapi perah. Campuran (x) memberikan 4 unit karbohidrat, 2 unit protein dan 2 unit lemak, campuran (y) memberikan 3 unit karbohidrat, 2 unit protein dan 5 unit lemak. Jika harga masing-masing campuran x dan y per unit Rp 8,- dan Rp 10,-. Tentukan kombinasi paling murah untuk memenuhi spesifikasi kebutuhan minimum sapi perahnya?

a. Fungsi obyektif: Minimisasi $C = 8x + 10y$

Kendala teknis: karbohidrat $4x + 3y \geq 31$

protein $2x + 2y \geq 15$

lemak $2x + 5y \geq 33$

Kendala ketidaknegatifan: a, b, c ≥ 0

Dengan menambahkan variabel surplus S_1, S2 dan \$3 pada ketidaksamaan-ketidaksamaan di atas maka ketidaksamaan-ketidaksamaan tersebut menjadi persamaan-persamaan:

$4x + 3y - s_1 = 31$

$2x + 2y - s_2 = 15$

$2x + 5y - s_3 = 33$ ....

Fase Awal:

Prog	Biaya/ Unik	C_1	8	10	0	0	0	R
		Quant	X	Y	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	31	4	3	-1	0	0	
s_2	0	15	2	2	0	-1	0	
s_3	0	33	2	5	0	0	-1	
$\pi = 0$		z_1	0	0	0	0	0	
		C_1-Z_1	8	10	0	0	0	

Pada tabel di atas, dengan menetapkan x = 0 dan y = 0 penyelesaian dasar tidak mungkin karena s_1 = -31, s_2 = -15 dan s_3 = -33 bernilai negatif. Dengan demikian penyelesaian ini melanggar asas kendala ketidaknegatifan. Untuk mengatasi persoalan tersebut maka harus dimasukkan variabel-variabel buatan atau variabel dummy (A). Variabel-variabel ini merupakan suatu variabel boneka yang ditambahkan pada masing-masing kendala untuk menghasilkan suatu penyelesaian dasar pertama yang mungkin. Dengan demikian, tabel awal selanjutnya dapat disusun sebagai berikut:

$4x + 3y - s_1 + A_1 = 31$

$2x + 2y - s_2 + A_2 = 15$px

$2x + 5y - s_3 + A_3 = 33$

Dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 15 \\ 33 \end{bmatrix}$$

Fase I :

Prog	Biaya/ Unik	C_1	8	10	0	0	0	0	0	0	R
		Quant	X	Y	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	
s_1	0	31	4	3	-1	0	0	1	0	0	31/3
s_2	0	15	2	2	0	-1	0	0	1	0	15/2
s_3	0	33	2	5	0	0	-1	0	0	1	33/5
$\pi = 0$		z_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		C_1-Z_1	8	10	0	0	0	0	0	0	

← baris kunci

← Kolom kunci

Dengan menetapkan $x = y = s_1 = s_2 = s_3 = 0$, penyelesaian Fase-I yang mungkin adalah $A_1 = 31$, $A_2 = 15$ dan $A_3 = 33$. Fungsi obyektif C = 8(0) + 10(0) = 0.

Dalam persoalan minimisasi, kolom kunci dipilih yang mempunyai nilai positif terbesar yang ditentukan dari penjumlahan elemen-elemen masing-masing kolom (3+2+5) > (4+2+2). Dengan demikian kolom y menjadi kolom kunci sebagaimana ditandai dengan anak panah. Sedangkan baris kunci, seperti halnya persoalan maksimisasi, ditentukan oleh rasio terkecil yang dihasilkan dari pembagian elemen-elemen kolom quantitas dengan elemen-elemen kolom kuncinya. Karena 33/5 = 6,6 merupakan rasio terkecil yang dihasilkan, maka baris-3 yang menjadi baris kunci (rasio baris-1 adalah 31/3 = 10,33 dan baris-2 adalah 15/2 = 7,5).

a. Baris-3 (s, digantikan dengan Y):

33 : 5 = 6,6
2 : 5 = 0,4
5 : 5 = 1
0 : 5 = 0
0 : 5 = 0
-1 : 5 = -0,2
0 : 5 = 0
0 : 5 = 0
1 : 5 = 0,2

Baris-1 fixed ratio = 3/5 = 0,6	Baris-2 fixed ratio = 2/5 = 0,4
31 – (33 x 0,6) = 11,2	15 – (33 x 0,4) = 1,8
4 – (2 x 0,6) = 2,8	2 – (2 x 0,4) = 1,2
3 – (5 x 0,6) = 0	2 – (5 x 0,4) = 0
-1 – (0 x 0,6) = -1	0 – (0 x 0,4) = 0
0 – (0 x 0,6) = 0	-1 – (0 x 0,4) = -1
0 – (-1 x 0,6) = 0,6	0 – (-1 x 0,4) = 0,4
1 – (0 x 0,6) = 1	0 – (0 x 0,4) = 0
0 – (0 x 0,6) = 0	1 – (0 x 0,4) = 1
0 – (1 x 0,6) = -0,6	0 – (0 x 0,4) = -0,4

Fase II :

Prog	Biaya/ Unik	C_1	8	10	0	0	0	0	0	0	R
		Quant	X	Y	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	
s_1	0	11,2	2,8	0	-1	0	0,6	1	0	-0,6	4
s_2	0	1,8	1,2	0	0	-1	0,4	0	1	-0,4	1,5
s_3	10	6,6	0,4	10	0	0	-2	0	0	0,2	16,5
$\pi = 0$		z_1	4	10	0	0	0	0	0	2	0
		C_1-Z_1	4	0	0	0	0	0	0	-2	

baris kunci

Kolom kunci

Proses tersebut belum mencapai optimal dan proses ini akan berjalan terus (*reiterasi*). Kolom kunci yang baru adalah pada kolom x dan baris kunci yang baru adalah baris-2. Pengaturan selanjutnya sama seperti langkah di atas yaitu:

b. Baris-2 (s2 digantikan dengan X):

1,8 : 1,2 = 1,5

1,2 : 1,2 = 1

0 : 1,2 = 0

0 : 1,2 = 0

1 : 1,2 = -0,83

0,4 : 1,2 = -0,33

0 : 1,2 = 0

1 : 1,2 = 0,83

0,4 : 1,2 = 0,333

Baris-1 fixed ratio = 2,8/1,2 = 2,33	Baris-2 fixed ratio = 0,4/1,2 = 0,33
11,2 – (1,8 x 2,33) = 7	6,6 – (1,8 x 0,33) = 6
2,8 – (1,2 x 2,33) = 0	0,4 – (1,2 x 0,33) = 0
0 – (0 x 2,33) = 0	1 – (0 x 0,33) = 1
-1 – (0 x 2,33) = -1	0 – (0 x 0,33) = 0
0 – (1 x 2,33) = 2,33	0 – (1 x 0,33) = 0,33
0,6 – (0,42 x 2,33) = -0,3	-0,2 – (0,4 x 0,33) = -0,33
1 – (0 x 2,33) = 1	0 – (0 x 0,33) = 0
0 – (1 x 2,33) = 2,33	0 – (0 x 0,33) = -0,33

-0,6 – (0,4 x 2,33) = 0,33 0 – (0 x 0,33) = -0,33

Fase III :

Prog	Biaya/ Unik	C_1	8	10	0	0	0	0	0	0	R
		Quant	X	Y	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	
s_1	0	7	0	0	-1	2,33	-0,33	-1	2,33	-0,33	
s_2	8	1,5	1	0	0	-0,83	0,33	0	-0,83	0,33	
s_3	10	6	0	1	0	-0,33	-0,33	0	0,33	-0,33	
π = 72		z_1	8	10	0	-3,33	-0,67	0	3,33	0,67	
		C_1-Z_1	0	0	0	3,33	0,67	0	-3,33	-0,67	

Penyelesaian terakhir telah mencapai optimum. Penyelesaian dasar optimum yang memungkinkan tersebut yaitu x = 1,5 dan y = 6, s_1 = 7, s_2 = s_3 = 0.

Kendala karbohidrat = 4(1,5) + 3(6) – 7 = 31

Kendala protein = 2(1,5) + 2(6) – 0 = 15

Kendala lemak = 2(1,5) + 5(6) – 0 = 33

c. Biaya minimum C sebesar = 8(1,5) + 10(6) = 72.

Hal-hal penting:

1. Dengan s_2 = s_3 = 0 kebutuhan kedua dan ketiga akan dipenuhi petani sapi secara tepat. Tidak terdapat surplus. Dengan s_1 kebutuhan pertama akan dipenuhi secara berlebih sebesar 7 unit.
2. Dengan indikator s_1 = 0, pengurangan satu unit dalam kebutuhan pakan pertama tidak akan mengurangi biaya. Akan tetapi pengurangan satu unit dalam kebutuhan pakan kedua atau ketiga akan mengurangi biaya masing-masing sebesar 3,33 rupiah dan 0,67 rupiah.
3. Elemen-elemen dari variabel surplus (s_1, s_2, s_3) akan selalu sama dengan negatif dari elemen-elemen variabel boneka yang berkaitan (A_1, A_2 dan A_3). Ini harus cocok dalam setiap tabel yang berurutan dan dapat membantu dalam menemukan kesalahan matematisnya.

15.6 DUAL: MAKSIMISASI DAN MINIMISASI

Persoalan maksimisasi atau minimisasi dalam program linear akan selalu dihadapkan pada soal minimisasi atau maksimisasi yang saling berkaitan. Soal asal atau mula-mula disebut primal dan soal yang terkait disebut dual.

Maksimumkan: $\pi = g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3$ 15-6

Dengan kendala: $a_1 x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \leq b_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \leq b_2$

$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \leq b_3$ 15-7

Program dual yang terkait adalah:

Minimumkan: $c = b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3$ 15-8

Dengan kendala: $a_1 z_1 + a_{21} z_2 + a_{31} z_3 \geq g_1$

$a_{12} z_2 + a_{22} z_2 + a_{32} z_3 \geq g_2$

$a_{31} z_3 + a_{32} z_2 + a_{33} z_3 \geq g_3$ 15-9

Kaidah-kaidah yang perlu difahami untuk memperoleh perumusan dual dari suatu soal primal antara lain:

1. Arah optimasi terbalik. Maksimisasi dalam primal akan menjadi minimisasi dalam dual atau sebaliknya. Nilai optimal fungsi obyektif primal selalu sama dengan nilai optimal dari fungsi obyektif dual asalkan terdapat suatu penyelesaian optimal yang memungkinkan.
2. Tanda ketidaksamaan dari kendala-kendala teknis adalah terbalik tetapi kendala ketidaknegatifan selalu lebih besar atau sama dengan nol.
3. Baris untuk elemen matriks primal akan berganti tempat atau ditranspos menjadi elemen kolom matriks pada dual.
4. Jika terdapat penyelesaian yang optimal: suatu variabel keputusan dalam primal yang mempunyai nilai bukan nol maka variabel slack atau surplus yang berkaitan dengan dual harus mempunyai nilai nol. Sebaliknya jika suatu variabel slack atau surplus dalam primal dengan nilai bukan nol, maka variabel keputusan yang terkait program dual harus mempunyai nilai optimal nol.
5. Variabel keputusan primal akan sama dengan harga bayangan masing-masing input dualnya. Atau, harga bayangan masing-masing input primal akan sama dengan variabel keputusan program dualnya.

Contoh 9. Diketahui suatu linear programming sebagai berikut:

Maksimumkan: $\pi = 31x_1 + 15x_2 + 33x_3$

Dengan kendala: $4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8$

$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 10$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Dalil dual digunakan untuk mencari nilai optimum fungsi obyektif primal dan variabel keputusan primalnya. Dualnya adalah:

Minimumkan: $C = 8z_1 + 10z_2$

Dengan kendala: $4z_1 + 3z_2 \geq 31$

$2z_1 + 2z_2 \geq 15$

$2z_1 + 5z_2 \geq 33$

$z_1, z_2, z_3 \geq 0$

Nilai optimal dari dual seperti pada penyelesaian soal contoh-8 adalah $z_1 = 1{,}5$ dan $z_2 = 6$ dan fungsi obyektif $C = 72$. Dengan demikian fungsi obyektif primalnya juga harus sama dengan 72.

Untuk membedakan variabel slack dalam primal dengan variabel surplus dalam dual, disepakati bahwa s, digunakan untuk primal dan t, digunakan untuk dualnya. Jadi,

$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_1 = 8$

$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + s_2 = 10.$ 1)

$4z_1 + 3z_2 – t_1 = 31$

$2z_1 + 2z_2 – t_2 = 15$

$2z_1 + 5z_2 – t_3 = 33.$ ....2)

Substitusikan nilai $z_1 = 1{,}5$ dan $z_2 = 6$ untuk mendapatkan t_1, t_2, t_3 pada persamaan 2):

$4(1{,}5) + 3(6) – t_1 = 31 \rightarrow t_1 = 7$

$2(1{,}5) + 2(6) – t_2 = 15 \rightarrow t_2 = 0$

$2(1{,}5) + 5(6) – t_3 = 33 \rightarrow t_3 = 0$

Karena variabel surplus ($t_2 = t_3 = 0$), variabel-variabel keputusan primal yang berkaitan (x_2, x_3) harus bukan nol. Dengan $t_1 = 7 \neq 0$, maka variabel keputusan yang berkaitan x_1 harus sama dengan nol. Sebaliknya untuk variabel keputusan dual (z_1, $z_2 \neq 0$), variabel keputusan primal yang berkaitan dengan (s_1, s_2) harus sama dengan nol.

Dengan substitusi $s_1 = s_2 = 0$ pada persamaan 1) dan mengingat bahwa $x_1 = 0$, selanjutnya persamaan 1) dapat disederhanakan menjadi:

$2x_2 + 5x_3 = 8$ $\qquad$ $2x_2 + 5x_3 = 10$

Penyelesaian secara simultan menghasilkan nilai $x_2 = 3,33$ dan $x_3 = 0,67$. Jadi variabel keputusan yang optimal: $x_1 = 0$, $x_2 = 3,33$, $x_3 = 0,67$.

Jadi, laba maksimum, $\pi = 31(0) + 15(3,33) + 33(0,67) = 72$ cocok!

Contoh 10. Tabel penyelesaian untuk dual pada contoh-9 dapat diselesaikan sebagai suatu primal dalam contoh-8 yaitu dengan mengubah x; menjadi z; dan s; menjadi t, untuk bentuk dual. Tabel final tersebut adalah:

Prog	Biaya/	C_1	8	10	0	0	0	0	0	0
	Unik	Quant	X	Y	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3
s_1	0	7	0	0	-1	2,33	-0,33	-1	2,33	-0,33
s_2	8	1,5	1	0	0	-0,83	0,33	0	-0,83	0,33
s_3	10	6	0	1	0	-0,33	-0,33	0	0,33	-0,33
$\pi = 72$		z_1	8	10	0	-3,33	-0,67	0	3,33	0,67
		C_1-Z_1	0	0	0	3,33	0,67	0	-3,33	-0,67

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Gambarkan grafik himpunan penyelesaian untuk sistem-sistem ketidaksamaan linear berikut ini:
   a. $4x + 2y \leq 16$, $x \leq 12$ dan $y \leq 7$
   b. $3x + 2y \leq 120$, $x + y \leq 50$ dan $x \leq 30$
   c. $3x + 2y \geq 6$, $x + \geq -2$ dan $y \geq 7$
   d. $3x + y \leq 12$, $x + \geq 6$ dan $x \leq 3$
   e. $2x + 7y \leq 14$ $3x + 5y \leq 15$ dan $2x + y \geq 4$
2. Soehartin menjual es lilin jenis I dan II dalam termos yang memuat paling banyak 300 biji. Ia menjual es lilin I seharga Rp 100,- dan jenis II Rp 80,- serta modalnya hanya Rp 28.000,-. Jika laba per biji masing-masing untuk jenis I Rp 15,- dan jenis II Rp 10,- berapa biji masing-masing yang terjual agar laba yang diperolehnya maksimum.
3. Sebuah pesawat Cassa dapat mengangkut penumpang tidak lebih dari 40 orang. Setiap penumpang kelas eksekutif boleh membawa bagasi 30 kg dan kelas ekonomi 10 kg. Daya muat pesawat tidak lebih dari 1.200 kg. Hitunglah berapa orang penumpang kelas eksekutif dan penumpang kelas ekonomi yang dapat diangkut.
4. Sebuah developer akan membangun perumahan diatas lahan seluas 8.500 m^2 yang terdiri dari dua tipe. Misalkan banyaknya rumah yang akan dibangun tidak lebih dari 50 buah. Tipe Anggrek memerlukan luas lahan 100 m^2 dan tipe Melati memerlukan luas 200 m^2. Selain itu 1.000 m^2 lahan harus disisihkan untuk fasilitas umum. Jika rumah tipe Anggrek dan tipe Melati masing-masing memberi keuntungan 5 juta rupiah dan 6 juta rupiah, hitunglah berapa unit yang harus dibangun untuk masing-masing tipe tersebut.
5. Seorang dokter menyarankan agar seseorang memperoleh minimum 60 unit vitamin A, 30 unit vitamin C dan 24 unit vitamin E setiap hari. Merk I harganya Rp 30,- yang memberikan 5 unit vitamin A, 6 unit vitamin C dan 3 unit vitamin E dan merk II seharga Rp 50,- memberikan 10 unit vitamin A, 2 unit vitamin C dan 2 unit vitamin E. Bagaimanakah kombinasi paling murah yang dapat menjamin kebutuhan harian tersebut.

6. Seorang ahli perkebunan ingin mencampur pupuk yang akan memberikan minimum 15 unit fosfat, 20 unit nitrat dan 24 unit kalium. Merk I dengan harga Rp1.200,- mempunyai komposisi 3 unit fosfat, 1 unit nitrat dan 3 unit kalium. Merk II dengan harga Rp 600,- mempunyai komposisi 1 unit fosfat, 5 unit nitrat dan 2 unit kalium. Bagaimanakah kombinasi paling murah untuk memenuhi spesifikasi yang diinginkan.
7. Gunakan algoritma simpleks untuk memaksimumkan laba dengan data-data berikut ini:

   Maksimumkan laba : $\pi = 6x + 2y$

   di bawah kendala : $3x + y \leq 18$

   $x + y \leq 8$

   $2x + 4y \leq 28$

   $x, y \geq 0$
8. Kerjakan kembali soal-7.

   Maksimumkan laba : $\pi = 40x + 20y$

   di bawah kendala : $6x + 15y \leq 120$

   $8x + 2y \leq 40$

   $x + 2y \leq 30$

   $x, y \geq 0$
9. Gunakan algoritma simpleks untuk meminimumkan biaya dengan data-data berikut ini:

   Maksimumkan laba : $\pi = 20x + 40y$

   di bawah kendala : $3x + y \leq 15$

   $6x + 4y \leq 48$

   $x + 2y \leq 30$

   $x, y \geq 0$
10. Kerjakan kembali soal-9

    Maksimumkan laba : $C = 30x + 50y$

    di bawah kendala : $6x + 2y \leq 30$

    $3x + 2y \leq 24$

    $x + 5y \leq 12$

    $x, y \geq 0$

11. Intuk soal primal berikut tentukan: (a) Rumus dualnya, (b) Selesaikan dual tersebut dengan metode grafik. Gunakan penyelesaian dual untuk memperoleh nilai optimal dari fungsi obyektif primal dan variabel-variabel keputusan primal.

a. Maksimumkan $\pi = 20x_1 + 25x_2$

di bawah kendala : $8x_1 + 2x_2 \leq 40$

: $4x_1 + 12x_2 \leq 144$

: $5x_1 + 3x_2 \leq 30$

$x, y \geq 0$

b. Maksimumkan $\pi = 18x_1 + 24x_2$

di bawah kendala : $2x_1 + 4x_2 \leq 32$

: $5x_1 + 2x_2 \leq 40$

: $3x_1 + 6x_2 \leq 48$

$x, y \geq 0$

c. Maksimumkan $\pi = 31x_1 + 15x_2 + 33x_3$

di bawah kendala : $4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8$

: $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 10$

$x, y \geq 0$

12. Kerjakan kembali seperti soal-11.

a. Minimumkan $C = 30x_1 + 60x_2$

di bawah kendala : $4x_1 + x_2 \geq 16$

: $2x_1 + 2x_2 \geq 28$

: $2x_1 + 3x_2 \geq 36$

$x, y \geq 0$

b. Minimumkan $C = 50x_1 + 20x_2$

di bawah kendala : $5x_1 + 5x_2 \geq 40$

: $4x_1 + 2x_2 \geq 20$

: $2x_1 + 4x_2 \geq 0$

$x, y \geq 0$

DAFTAR PUSTAKA

Anonimus, 1985. *Tabel Input-Output Indonesia*. Penerbit Biro Pusat Statistik, Jakarta.

Allen, R.G.D., 1960. *Mathematical Analysis for Economists*. MacMillan and Co. Ltd., London.

Assauri, S., 1985. *Matematika Ekonomi*. Edisi Kedua, Penerbit CV. Rajawali, Jakarta.

Ayres, F.J., 1972. *Differensial and Integral Calculus*. Schaum's Ouline Series, New York.

Chiang, A.C., 1967. *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. McGraw-Hill Book Company, New York.

Dowling, E.T., 1990. *Matematika Untuk Ekonomi*, (Terjemahan) Seri Buku Schaum. Penerbit PT. Erlangga, Jakarta.

Dumairy, 1984. *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*. Bagian Penerbit Fakultas Ekonomi, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Handley, G., 1961. *Linear Algebra*. Addison-Wesley Reading Massachusetts.

Intriligator, M.D., 1971. *Mathematical Optimization and Economic Theory*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New York.

Johannes, H. dan Handoko, B.S., 1974. *Pengantar Matematika Untuk Ekonomi*. Penerbit LP3ES, Jakarta.

Kadariah, dkk., 1978. *Pengantar Evaluasi Proyek*. Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi, Universitas Indonesia, Jakarta.

Lipsey, R.B., et al. 1995. *Pengantar Mikroekonomi*. Jilid Satu Edisi Kesepuluh, Penerbit Binarupa Aksara, 1995.

Mardiasmo, 1997. *Perpajakan*. Edisi Keempat, Penerbit ANDI, Yogyakarta.

Moeljono, M. dan Wirzon, B., 1991. *Ekonomi Managerial Alat Pengambilan Keputusan Dalam Managemen Bisnis*. Cetakan Pertama, Penerbit Kalam Mulia, Jakarta.

Mubyarto, 1977. *Pengantar Ekonomi Pertanian*. Penerbit LP3ES, Jakarta.

Nasution, A.H., dkk., 1994. *Matematika 2*. Penerbit Balai Pustaka, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Jakarta.

Partadiredja, A., 1981. *Pengantar Ekonomika*. Bagian Penerbit Fakultas Ekonomi, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Raharja, P., 1986. *Diferensial dan Integral Untuk Ilmu Ekonomi*. Penerbit Intermedia, Jakarta.

Richardson, H.W., 1972. *Input-Output and Regional Economics*. John Wiley & Sons Inc. New York.

Simarmata, D.A., 1984. *Pendekatan Sistem Dalam Analisa Proyek Investasi dan Pasar Modal*. Penerbit PT. Gramedia, Jakarta.

Soedojo, P., 1985. *Fisika Matematik*. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Soelistyo, 1982. *Pengantar Ekonometri I, Edisi Pertama*. Bagian Penerbit Fakultas Ekonomi, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Sohn, I., 1986. *Readings in Input-Output Analysis*. *Theory and Applications*. Oxford University Press, New York.

Spiegel, M.R., 1971. *Finite Differences and Difference Equations*. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York.

Sutojo, S., 1993. *Studi Kelayakan Proyek Teori dan Praktek*. Penerbit PT. Pustaka Binaman Pressindo, Jakarta.

Tjiptoherijanto, P., 1986. *Tanya-Jawab Ekonomi Mikro*. Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi, Universitas Indonesia, Jakarta.

Tohir, M., dkk., 1980. *Matematika Ekonomi*. Penerbit Ananda, Yogyakarta.

Yamane, T. 1962. *Mathematics for Economics: An Elementary Survey*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New York.

Zainuddin, Z., 1960. 275 *Soal-soal Aldjabar*. Penerbit Toko Buku "Pak Roes", Semarang.